

Physikalisches Praktikum II im SS 2011

UNIVERSITÄT STUTTGART

**Protokoll zum Versuch**

## **V15: Quantum Analogs**

Stephan Ludwig, Nicolai Lang

17. Juli 2011

### **Zusammenfassung**

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Analogien von Quantenmechanik und Akustik, die auf Grund der Gemeinsamkeiten der die Dynamik beschreibenden Gleichungen etabliert werden können. Im Speziellen werden die akustischen Spektren von Röhrenresonatoren als Modell des Kastenpotentials, von sphärischen Resonatoren als Modell des Wasserstoffatoms und von periodischen Resonatorketten als Modell eines 1-dimensionalen Festkörpers untersucht. In diesem Rahmen können sowohl die Beschreibung sphärisch symmetrischer Probleme durch Kugelflächenfunktionen als auch die Ausbildung von Bandstrukturen in Frequenzspektren experimentell veranschaulicht werden.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1 Atom- und Molekülphysik . . . . .	3
1.1.1 Das Kastenpotential . . . . .	3
1.1.2 Das Wasserstoffatom . . . . .	4
1.1.3 Das Wasserstoffmolekül(-ion) . . . . .	6
1.1.4 Lebensdauer von Zuständen . . . . .	7
1.2 Festkörperphysik . . . . .	8
1.2.1 Reziproker Raum und erste Brillouin-Zone . . . . .	8
1.2.2 Bragg-Bedingung . . . . .	9
1.2.3 Dispersionsrelation und Bandlücke . . . . .	11
1.3 Analogie zwischen Quantenmechanik und Akustik . . . . .	13
1.3.1 Grundlagen der Akustik . . . . .	13
1.3.2 Analogie zum Kastenpotential . . . . .	13
1.3.3 Analogie zum Wasserstoffatom . . . . .	15
1.3.4 Analogie zu periodischen 1D-Potentialen . . . . .	16
1.3.5 Analogie der Linienverbreiterung . . . . .	17
<b>2 Auswertung und Versuchsbeschreibung</b>	<b>19</b>
2.1 Röhrenresonatoren als Modell des 1D Kastenpotentials . . . . .	19
2.1.1 Resonanzen einer Röhre . . . . .	19
2.1.2 Hochaufgelöstes Spektrum einer Röhre . . . . .	21
2.2 Sphärischen Resonator als Modell des Wasserstoffatoms . . . . .	25
2.2.1 Bestimmung der l-Quantenzahlen . . . . .	25
2.2.2 Polare Darstellung der Wellenfunktionen . . . . .	29
2.2.3 Spektren des sphärischen Resonators bei gebrochener Symmetrie . . . . .	31
2.3 Lineare Resonatorketten als Festkörpermodell . . . . .	35
2.3.1 Resonanzen einer Röhre (600 mm) . . . . .	35
2.3.2 Spektren 1-dimensionaler Festkörper . . . . .	35
2.3.3 Spektrum eines Übergitters . . . . .	44
2.3.4 Einfluss von Defekten auf die Spektren . . . . .	45
<b>3 Fehlerdiskussion</b>	<b>48</b>
<b>4 Zusammenfassung</b>	<b>51</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>53</b>
<b>Literatur</b>	<b>55</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Atom- und Molekülphysik

Die Atom- und Molekülphysik sind zwei der wichtigsten Anwendungsbereiche der Quantenmechanik. Ohne diese ließen sich weder die Anregungsschemata einzelner Atome erklären noch die Stabilität der Elektronenhülle überhaupt begründen. Auch die Bindungen zwischen Atomen (und damit die Bildung von Molekülen und Festkörpern) lassen sich nur sehr begrenzt im Rahmen klassischer Vorstellungen darstellen. So ist die Begründung heteronuklearer, ionischer Bindungen mit Hilfe der Coulomb-Kraft noch einigermaßen plausibel. Kovalente, homonukleare Bindungen hingegen lassen sich nur noch quantenmechanisch beschreiben.

Diese Beschreibung führt auf den Begriff der (komplexwertigen) Wellenfunktion  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , deren Betragsquadrat  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  die Wahrscheinlichkeit angibt, das beschriebene Teilchen (im Folgenden immer ein Hüllenelektron) am Ort  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t$  vorzufinden. Befindet sich ein Elektron der Masse  $m$  im (zeitunabhängigen!) Potential  $V(\mathbf{r})$ , so muss dessen Wellenfunktion die *Schrödingergleichung* erfüllen

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

Ein Produktansatz  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \Psi(\mathbf{r})$  separiert die Zeitabhängigkeit von der räumlichen Variation und führt so auf die *zeitunabhängige Schrödingergleichung*

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = H\Psi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

mit dem Hamilton-Operator  $H$ . Dies ist eine Eigenwertgleichung auf einem Funktionenraum mit Eigenwert  $E$  und zu diagonalisierendem Operator  $H$ . Da  $H$  hermitesch ist existiert eine ONB aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten  $E$ . Letztere werden als Energien der Eigenzustände interpretiert.

Im Folgenden werden drei Anwendungen dieses Formalismus beschrieben, welche im Laufe des Versuches durch akustische Experimente veranschaulicht werden können.

### 1.1.1 Das Kastenpotential

Im Kastenpotential mit unendlich hohen Potentialwänden (siehe Abb. 1 links) nimmt für  $0 \leq x \leq L$  die SG die folgende, einfache Form an

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x) \quad (3)$$

Für  $x < 0$  sowie  $x > L$  muss  $\Psi(x) = 0$  gelten. Da hieraus speziell  $\Psi(0) = 0$  folgt, wählen wir den antisymmetrischen Ansatz

$$\Psi(x) = A \sin(kx) \quad (4)$$

Wegen  $\Psi(L) = 0$  (Stetigkeit!) folgt die zusätzliche Bedingung  $k = n\frac{\pi}{L}$ . Hier ist  $n \in \mathbb{N}$ , da für  $n < 0$  keine neuen Zustände erzeugt werden. Normierung  $\|\Psi\|_{L_2} = 1$  (die Wahrscheinlichkeit das Elektron *irgendwo* zu finden muss gleich eins sein) ergibt den Faktor  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ . Damit sind die Eigenfunktionen

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \quad (5)$$

und nach Einsetzen in die SG die Eigenenergien

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (6)$$

des Problems. Die Eigenfunktionen für  $n = 1, 2, 3$  sind in Abb. 1 (rechts) dargestellt. Die *Dispersionsrelation*  $E(k)$  mit der Kreiswellenzahl  $k$  ergibt sich damit zu

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{L} \quad \text{und } n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Diese parabolische Form entspricht der Dispersionsrelation des freien Teilchens mit dem Unterschied, dass hier  $k$  nur diskrete Werte annehmen kann. Für  $L \rightarrow \infty$  ist  $k \in \mathbb{R}$  und wir erhalten das freie Elektron als Grenzfall.

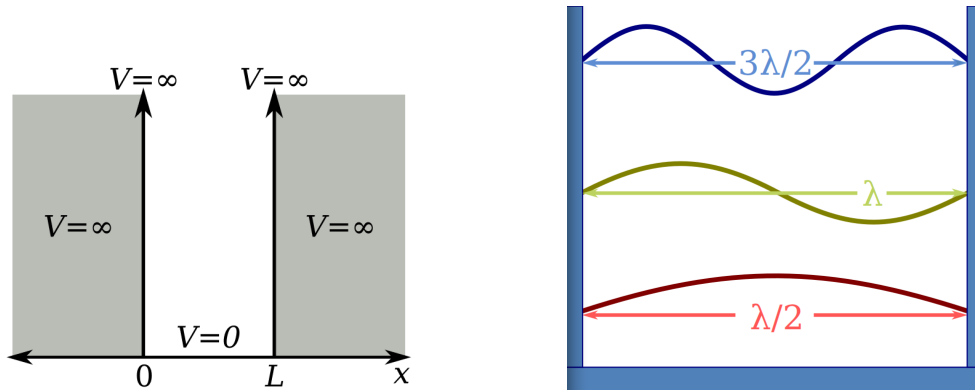


Abbildung 1: Die Potentiallandschaft des Kastenpotentials (links) und die ersten drei (reellwertigen) Wellenfunktionen (rechts) (Quelle: [8]).

### 1.1.2 Das Wasserstoffatom

Das Wasserstoffproblem ist eines der wenigen quantenmechanischen Probleme der Atomphysik, dessen Lösungen in analytisch geschlossener Form angegeben werden können. Das Wasserstoffatom, bestehend aus einem Proton als Kern und einem einzelnen Hüllenelektron, wird dabei durch das Coulombpotential des Kerns beschrieben. Die Eigenschaften der Wellenfunktionen resultieren weitgehend aus

1. dem kugelsymmetrischen Potential
2. dem  $\frac{1}{r}$  Abfall des Potentials.

Ausschlaggebend für die Lösbarkeit des Problems ist die Symmetrie des Potentials, welche eine Behandlung in Kugelkoordinaten und anschließende Separation von Winkel- und Radialteil erlaubt.

Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (8)$$

mit der Elementarladung  $e$ . Geht man in Kugelkoordinaten über, so lässt sich der Laplace-Operator schreiben als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \quad (9)$$

mit dem Radialteil  $\Delta_r$  und dem Winkelanteil  $\Delta_{\vartheta, \varphi}$ . Wir wählen nun den Separationsansatz  $\Psi_{nlm}(\mathbf{r}, t) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta, \phi)$  und erhalten zwei entkoppelte DGLen

$$ER_{nl}(r) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hbar^2}{2mr^2} l(l+1) - \frac{e^2}{r} \right] R_{nl}(r) \quad (10)$$

$$-l(l+1)Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (11)$$

Genauere Betrachtungen zeigen, dass die vorerst beliebige Konstante  $l$  als positive ganze Zahl gewählt werden kann,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Die Lösungen der Eigenwertgleichung des Winkelanteils des Laplace-Operators werden als *Kugelflächenfunktionen*  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  bezeichnet und lassen sich ihrerseits durch einen Separationsansatz allgemein bestimmen. Hier sei nur die Lösung angegeben

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{lm} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (12)$$

mit den *zugeordneten Legendrepolynomen*

$$P_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (13)$$

und dem Normierungsfaktor

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (14)$$

sodass  $\int |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega = 1$ .

Die Lösung des Radialteiles bedarf einiger Rechnungen und liefert unter Berücksichtigung gewisser physikalischer Randbedingungen die Lösung

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \quad (15)$$

mit den *zugeordneten Laguerre-Polynomen*

$$L_n^k(\rho) = \frac{e^\rho \rho^{-k}}{n!} \frac{d^n}{d\rho^n} (e^{-\rho} \rho^{n+k}) \quad (16)$$

und  $\rho = \frac{2r}{na_0}$  wobei  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$  den *Bohrschen Radius* bezeichnet.

Die Eigenenergien der Zustände ergeben sich durch Einsetzen in die SG zu

$$E_n = -\frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \cdot \frac{1}{2n^2} \quad (17)$$

mit der Kernladungszahl  $Z$  (im Falle des H-Atoms also  $Z = 1$ ).

Für die Quantenzahlen gilt  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l \leq n-1$  sowie  $-l \leq m \leq l$ . Bemerkenswert ist hier der hohe Entartungsgrad der Zustände, da die Energie nur von der Hauptquantenzahl  $n$  und weder von der Drehimpulsquantenzahl  $l$  noch von der magnetischen Quantenzahl  $m$  abhängt.

Viele Atome zeigen allerdings auf Grund zusätzlicher Effekte eine  $l$ -Aufspaltung und in Magnetfeldern zusätzlich eine  $m$ -Aufspaltung (*Zeemaneffekt*, Bruch der Rotationssymmetrie durch das Magnetfeld). Weiterhin führen die Berücksichtigung der Kopplung von Spin- und Bahnmoment sowie relativistischer Beiträge zu komplexen Aufspaltungen unterschiedlicher Terme. Dies ist im Folgenden nicht von Belang.

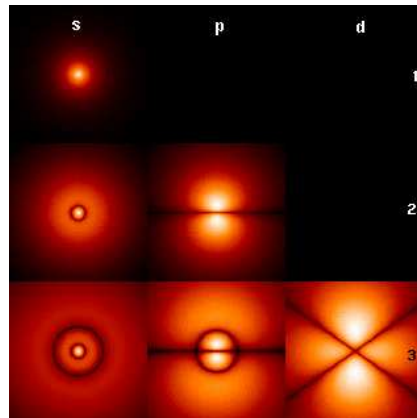


Abbildung 2: Querschnitt der Elektronendichteverteilung (Quelle: [9]).

Abb. 2 stellt das Betragsquadrat der Elektronenwellenfunktion in einer durch den Kern verlaufenden Ebene dar. Die Symbole s, p und d stehen hier wie üblich für die Drehimpulsquantenzahlen  $l = 0, 1, 2$ . Die Zahlen am rechten Rand entsprechen den Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3$ . Man erkennt, dass höhere Hauptquantenzahlen zu zusätzlichen Knoten in radialer Richtung führen, während höhere Drehimpulsquantenzahlen weitere Knotenebenen durch den Ursprung zu Folge haben.

### 1.1.3 Das Wasserstoffmolekül(-ion)

**Wasserstoffmolekülion** Das quantenmechanische Dreikörperproblem ist ebensowenig analytisch lösbar wie das klassische Analogon. Folglich lässt sich selbst für das einfachste Molekül, das Wasserstoffmolekülion  $H_2^+$ , keine exakte analytische Lösung finden. Allerdings existiert eine Vielzahl möglicher Näherungsmethoden um die Wellenfunktionen solcher Vielteilchensysteme zu approximieren [2].

Im Fall des  $H_2^+$ -Ions lautet die zeitunabhängige SG bei Vernachlässigung der Kerndynamik (fester, parametrischer Kernabstand  $R_{ab}$ )

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r_a} - \frac{e^2}{r_b} \right] \Psi(\mathbf{r}) \tag{18}$$

wobei hier  $r_a$  und  $r_b$  die Abstände des Elektrons zu den jeweiligen Kernen (i.e. Proton  $a$  bzw.  $b$ ) bezeichnen. Der Ansatz  $\Psi(\mathbf{r}) = c_1\Psi_a(\mathbf{r}) + c_2\Psi_b(\mathbf{r})$  mit den atomaren Wellenfunktionen  $\Psi_{a,b}(\mathbf{r})$ , die ein Hüllenelektron von Kern  $a$  bzw.  $b$  im s-Zustand beschreiben, liefert nach einigen Rechnungen die Wellenfunktionen

$$\Psi^+(\mathbf{r}) = c[\Psi_a(\mathbf{r}) + \Psi_b(\mathbf{r})] \quad \text{und} \quad \Psi^-(\mathbf{r}) = c[\Psi_a(\mathbf{r}) - \Psi_b(\mathbf{r})] \tag{19}$$

Hier ist  $c$  mit Hilfe der Normierung zu bestimmen. Für die Bindungsenergien  $\Delta E^\pm$  folgt

$$\Delta E^\pm = \frac{C \pm D}{1 \pm S} + \frac{e^2}{R_{ab}} \tag{20}$$

mit Kernabstand  $R_{ab}$ ,  $0 < S \leq 1$  und  $C, D < 0$  ( $C, D$  und  $S$  sind Zahlenwerte die durch Integration bestimmt werden müssen).

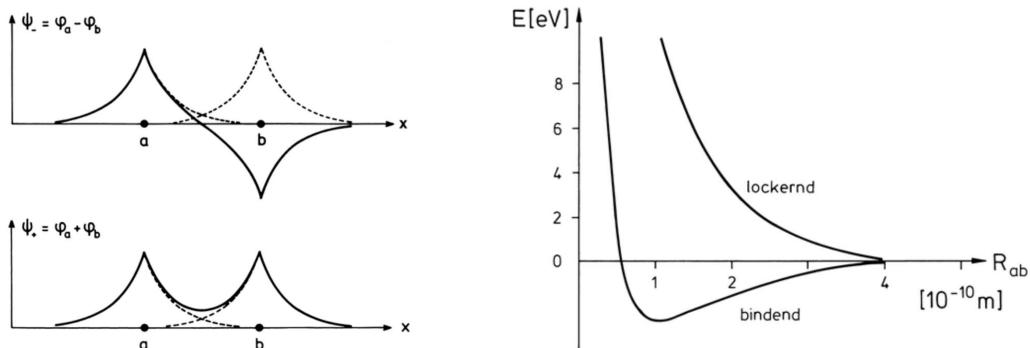


Abbildung 3: Gerade und Ungerade Wellenfunktionen des Wasserstoffmolekülions (links) als Linearkombination zweier Atomorbitale sowie Abhängigkeit der Bindungsenergie  $\Delta E$  vom Kernabstand  $R_{ab}$  (Quelle: [2]).

Die numerisch berechneten Werte der Bindungsenergie sind in Abb. 3 (rechts) dargestellt. Man erkennt, dass für den sog. *antibindenden* Zustand  $\Psi^-$  (links oben), der sich durch eine verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons zwischen den Kernen auszeichnet, keine Absenkung der Gesamtenergie möglich ist. Im Gegensatz dazu können für gewisse Kernabstände die Bindungsenergien für Elektronen im *bindenden* Zustand  $\Psi^+$  (links unten) negativ werden. Dieser symmetrische Zustand führt also zu einer Bindung zwischen beiden Protonen, wobei das Elektron eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Kernen aufweist und daher als "Kitt" zwischen den sich abstoßenden Protonen dient.

**Wasserstoffmolekül** Im Gegensatz zum  $H_2^+$ -Molekülion ist beim  $H_2$ -Molekül ein weiteres Elektron zu berücksichtigen. Die zugehörige Wellenfunktion muss dem PAULI PRINZIP gehorchen, dem

zufolge die Zustandsfunktion eines Mehrelektronensystems antisymmetrisch bezüglich Teilchenpermutationen ist. Diese Antisymmetrie stellt die fermionische Statistik der Elektronen sicher, wonach der Tausch zweier Elektronen das Vorzeichen der beschreibenden Gesamtwellenfunktion umkehrt.

Die zu lösende zeitunabhängige SG lautet

$$E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[ H_1 + H_2 - \frac{e^2}{r_{a2}} - \frac{e^2}{r_{b1}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R_{ab}} \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (21)$$

wobei  $H_{1,2}$  die Hamilton-Operatoren eines einzelnen Wasserstoffatoms sind, indem Elektron 1 (2) um Kern  $a$  ( $b$ ) "kreist". Die Abstände sind Abb. 4 zu entnehmen.

Wird die Bindungslänge  $R_{ab}$  als Parameter gewählt, lässt sich die Kopplungsstärke zwischen den beiden Atomen kontinuierlich verändern. Für  $R_{ab} \rightarrow \infty$  spielen die Wechselwirkungsterme keine Rolle mehr und man erhält

$$H = H_1 + H_2 \quad (22)$$

Umgekehrt erhält man für  $R_{ab} \rightarrow 0$  in einem stetigen Prozess den Hamilton-Operator des Heliums ( $\rightarrow$  Vereinigte-Kerne-Modell).

Im einfachen Fall von Gl. (22) lässt sich die SG exakt durch einen Produktansatz  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2)$  lösen.

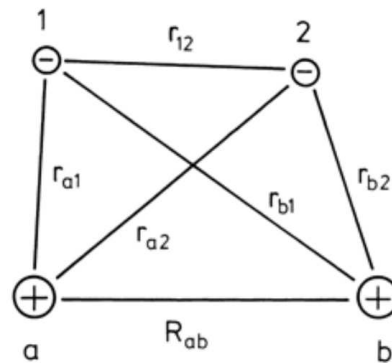


Abbildung 4: H<sub>2</sub>-Molekül (Quelle: [2]).

Dieser erfüllt allerdings das PAULI PRINZIP nicht. Berücksichtigt man den Elektronenspin  $\uparrow$  ( $i$ ) bzw.  $\downarrow$  ( $i$ ) des Elektrons  $i$  und symmetrisiert bzw. antisymmetrisiert man Ortswellen- und Spinfunktion, erhält man vier mögliche Gesamtwellenfunktionen, die jede für sich antisymmetrisch unter Elektronenpermutationen ist:

$$\Psi_{t1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \uparrow(1) \uparrow(2) [\Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) - \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1)] \quad (23)$$

$$\Psi_{t2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \downarrow(1) \downarrow(2) [\Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) - \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1)] \quad (24)$$

$$\Psi_{t3}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\uparrow(1) \downarrow(2) + \uparrow(2) \downarrow(1)] [\Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) - \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1)] \quad (25)$$

$$\Psi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\uparrow(1) \downarrow(2) - \uparrow(2) \downarrow(1)] [\Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1)] \quad (26)$$

Die Wellenfunktionen  $\Psi_{ti}$  gehören zu einem Triplett mit antisymmetrischer Orts- und symmetrischer Spinfunktion, während  $\Psi_s$  als Singlettwellenfunktion durch eine antisymmetrische Spin- und einer symmetrischen Ortswellenfunktion gekennzeichnet ist. Numerische Berechnungen zeigen, dass die Eigenenergie von  $\Psi_s$  einen gebundenen Zustand zulässt. Dies korrespondiert mit der bekannten Regel, dass zwei Elektronen im selben Orbital (hier  $\Psi_s$ ) antiparallelen Spin besitzen. Auch hier führt die symmetrische Ortswellenfunktion zu einer endlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen zwischen den beiden Kernen und damit zu einer Energieabsenkung.

Die mit  $\Psi_s$  berechneten Eigenenergien des Systems stimmen recht gut mit experimentellen Werten überein. Dieses Verfahren zur näherungsweise Bestimmung von Wellenfunktionen und Bindungsenergien wird nach seinen Entwicklern als HEITLER-LONDON-METHODE bezeichnet.

### 1.1.4 Lebensdauer von Zuständen

Der Zerfall eines quantenmechanischen Zustandes beschreibt den *inkohärenten* Übergang eines Systems in einen energetisch niedrigeren Zustand (oft den Grundzustand). Dies lässt sich z.B. bei angeregten Atomen aber auch beim  $\alpha$ -Zerfall beobachten. Da sich inkohärente Prozesse nicht

durch die unitäre Zeitentwicklung der SG beschreiben lassen, werden hierfür sog. *Mastergleichungen* aufgestellt, die phänomenologisch begründet die Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände beschreiben.

Nachträglich lässt sich der spontane Zerfall durch eine nicht unitäre Zeitentwicklung berücksichtigen

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-(\lambda + i\frac{E}{\hbar})t} \Psi(\mathbf{r}), \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (27)$$

Die Verletzung der Unitarität folgt wegen  $\|\Psi(t)\|_{L_2} = e^{-\lambda t} < 1$  für  $t > 0$ . Dies führt zum bekannten Effekt der (natürlichen) Linienverbreiterung, die man z.B. mit guten Spektrometern bei Atomübergängen beobachten kann. Eine anschauliche Erklärung ist die Folgende: Die Energie-Zeit-Unschärfe verlangt  $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ . Damit lässt sich die Energie eines (angeregten) Systems um so genauer bestimmen, je länger es in diesem Zustand verweilt. Umgekehrt bedeutet dies, dass die endliche Lebensdauer eines Zustandes (wie sie durch den spontanen Zerfall erzwungen wird) seiner Eigenenergie eine Unschärfe aufzwingt. Beim Übergang von diesem Zustand in den Grundzustand macht sich dies durch eine verbreiterte Linie im Spektrogramm bemerkbar.

Mathematisch ist dieser Effekt durch die Fouriertransformation bedingt. Hierfür nehmen wir an, dass  $\Psi(\mathbf{r}, t) = 0$  für  $t < 0$  gilt (das Teilchen werde also zur Zeit  $t=0$  in den betrachteten Zustand gebracht und zerfalle daraufhin spontan). Es folgt für die Spektralfunktion

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) + \lambda} \Rightarrow |A(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2} \quad (28)$$

mit  $E = \omega_0 \hbar$ . Dies ist offensichtlich eine LORENTZ KURVE mit HWHM  $\gamma = \frac{1}{\tau}$ . Hier ist  $\tau$  die Lebensdauer des Zustandes. Damit beträgt die Energieverbreiterung  $\Gamma = \hbar\lambda$ , da  $|A(\omega)|^2$  ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, das System mit Energie  $\hbar\omega$  anzutreffen.

## 1.2 Festkörperphysik

Die Festkörperphysik ist das prominenteste Fachgebiet der Physik der kondensierten Materie. Sie beschäftigt sich mit den physikalischen Eigenschaften zumeist kristalliner Feststoffe. Hierzu gehören insbesondere die elektronischen Eigenschaften und die quantenmechanische Beschreibung elektronischer Zustände in Kristallstrukturen. Die hierfür nötige Theorie soll im Folgenden kurz erläutert werden.

### 1.2.1 Reziproker Raum und erste Brillouin-Zone

**Gitter** Das mathematische Gerüst der Festkörperphysik ist die Gruppentheorie. Genauer die Theorie kristallographischer Gruppen. Diese speziellen Symmetriegruppen operieren auf einem Gitter  $\Gamma = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^3$ , das von den Gittervektoren  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  aufgespannt wird. Jeder Gitterpunkt  $\mathbf{T} \in \Gamma$  kann also durch

$$\mathbf{T} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + t_3 \mathbf{a}_3 \quad (29)$$

mit  $t_i \in \mathbb{Z}$  eindeutig dargestellt werden. Die Verbindung zur physikalischen Realität wird durch die *atomare Basis* hergestellt. Diese beschreibt, an welchen Orten bezüglich eines jeden Gitterpunktes welches Atom sitzt. Um einen Festkörper zu beschreiben muss also sowohl das Gitter als auch die Basis angegeben werden. Seien  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  zwei beliebige Orte in  $\mathbb{R}^3$ , sodass der Kristall an beiden gleich aussieht (dies ist also eine physikalische Bedingung). Dann heißt das Gitter  $\Gamma$  *primitiv*, falls  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \in \Gamma$ . Der von der Basis  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  eines primitiven Gitters aufgespannte Parallelepipid

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \quad (30)$$

heißt *primitive Elementarzelle* und füllt durch Translation um alle Vektoren in  $\Gamma$  den gesamten Raum  $\mathbb{R}^3$  gerade aus. Primitive Elementarzellen werden häufig zur effizienten Beschreibung der Kristallstruktur benutzt, indem man eine atomare Basis für diese Zelle (sog. primitive Basis) angibt. Die wichtigste primitive Elementarzelle ist wohl die *Wigner-Seitz-Zelle*, da für diese eine Konstruktionsvorschrift existiert.

**Reziprokes Gitter** Um den Begriff des reziproken Gitters einzuführen, betrachten wir eine skalare, gitterperiodische Funktion  $n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , also

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = n(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} \in \Gamma \tag{31}$$

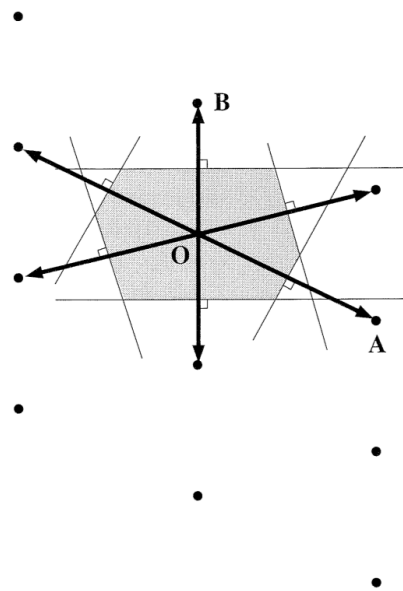
Auf Grund der Periodizität lässt sich diese Funktion in eine 3-dimensionale Fourierreihe

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G} \in \Gamma'} n_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \tag{32}$$

entwickeln mit

$$n_{\mathbf{G}} = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} n(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) dV \tag{33}$$

Hierbei sind  $\mathbf{G}$  gerade die für eine  $\Gamma$ -periodische Funktion benötigten Fourierrektoren. Die Menge aller  $\mathbf{G}$  heißt *reziprokes Gitter*  $\Gamma'$ . Sei  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  eine Basis von  $\Gamma'$ . Dann gilt die Orthogonalitätsrelation  $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$ . Mit deren Hilfe überprüft man leicht, dass tatsächlich  $n(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = n(\mathbf{r})$  gilt falls  $\mathbf{T} \in \Gamma$ . Bildlich gesprochen entsprechen reziproke Gittervektoren Ebenenscharen im Kristall mit einer durch Länge und Richtung des reziproken Vektors festgelegten Periodizität und Ausrichtung. Die *Wigner-Seitz-Zelle* (siehe Abb. 5) des reziproken Gitters heißt *erste Brillouin-Zone*.



Betrachten wir den einfachen Fall eines 1-dimensionalen Gitters mit Gitterkonstanten  $a$  und eine Gitterperiodische Funktion (z.B. die Elektronendichte)  $n$ . Dann lässt sich  $n$  in die Fourierreihe

$$n(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} n_p \exp\left(ip \frac{2\pi}{a} \cdot x\right) \tag{34}$$

Abbildung 5: Konstruktion einer Wigner-Seitz-Zelle (Quelle: [3]).

mit entsprechenden Fourierkoeffizienten  $n_p \in \mathbb{C}$  entwickeln.

Hier ist  $a$  die Gitterbasis im Gitter  $\Gamma = a\mathbb{Z}$  und  $\frac{2\pi}{a}$  die reziproke Gitterbasis von  $\Gamma' = \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$ . Dies ist in Abb. 6 dargestellt. Man erkennt, dass die erste Brillouin-Zone genau einen reziproken Gitterpunkt enthält und gerade die Länge eines reziproken Basisvektors breit ist. Durch Verschieben um reziproke Gittervektoren lassen sich so alle  $k$ -Vektoren im reziproken Raum auf einen  $k'$ -Vektor in der ersten Brillouin-Zone zurückführen.

### 1.2.2 Bragg-Bedingung

Die bekannte *Bragg-Bedingung* für die Reflexion von z.B. Röntgenstrahlen an kristallinen Stoffen ist gegeben durch

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

wobei  $d$  den Abstand der Netzebenenschar bezeichnet, an der gebeugt werden soll. Tatsächlich ist obige Bedingung nur der Spezialfall eines viel allgemeineren Zusammenhangs, der beschreibt, in welche Richtungen Wellen innerhalb eines periodischen Gitters aus Streuzentren gebeugt werden

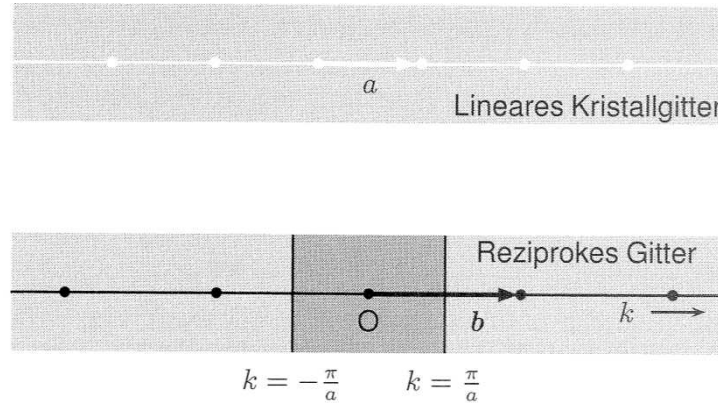


Abbildung 6: 1D-Gitter mit Gitterkonstanten  $a$  (oben) und reziproker Raum (unten). Die erste Brillouin-Zone ist farblich hervorgehoben (Quelle: [3]).

können. Diese Bedingung lässt sich speziell auf das Elektronengas im kristallinen Festkörper anwenden, da hier die positiven Atomrümpfe ein gitterperiodisches Potential erzeugen und damit als Streuzentren im obigen Sinne fungieren.

Zur Herleitung der *allgemeinen Bragg-Bedingung* betrachten wir Abb. 7 (hier für Röntgenstrahlen). In diesem Fall ist die Elektronendichte ein Maß für den lokalen Streuquerschnitt. Damit ergibt sich die Streuamplitude in Richtung  $\mathbf{k}'$  zu

$$F = \int_V n(\mathbf{r}) \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] dV \tag{36}$$

setzen wir nun  $\Delta\mathbf{k} := \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  und  $n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G} \in \Gamma'} n_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})$  ein, folgt

$$F = \sum_{\mathbf{G} \in \Gamma'} \int_V n_{\mathbf{G}} \exp [i(\mathbf{G} - \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}] dV \tag{37}$$

Dieses Integral ist nur dann wesentlich von 0 verschieden, wenn

$$\mathbf{G} = \Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \tag{38}$$

Dies ist die Bragg-Bedingung. In Worten: Eine Welle wird in einem periodischen Gitter eines *endlichen* Systems aus Streuzentren nur dann messbar gestreut, wenn die Differenz aus ein- und ausfallendem Wellenvektor gerade ein reziproker Gittervektor ist.

Die Begriffe *endlich* und *messbar* in obiger Aussage sind kausal verknüpft. Um dies zu erkennen rufe man sich ins Gedächtnis, dass

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \tag{39}$$

eine Darstellung der Delta-Distribution ist. Wäre das Volumen des Streuers (i.e. des Kristalls)  $V = \mathbb{R}^3$  unendlich, so wäre  $F$  tatsächlich identisch 0 falls kein reziproker Vektor mit  $\mathbf{G} = \Delta\mathbf{k}$  existiert. Durch die Endlichkeit von  $V$  ist das Integral der Streuamplitude aber nur eine mehr oder weniger gute Approximation der Delta-Distribution, d.h. auch für Streurichtungen ohne passende reziproke Vektoren existieren schwache Reflexe (Man kann dies auch als Beugung der Welle am Kristall als Ganzes auffassen).

Die Bedingung 38 lässt sich noch etwas umformen, wenn man annimmt, dass  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = G^2 \tag{40}$$

Diese Bedingung lässt sich z.B. bei der Röntgenbeugung einsetzen, ist aber für die Beschreibung eines Elektronengases im Festkörper weniger relevant.

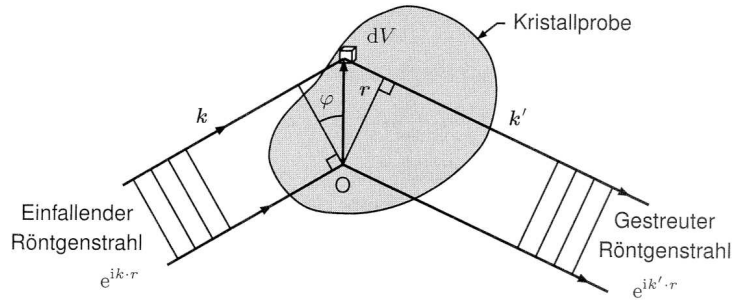


Abbildung 7: Schematische Darstellung der Streuung am Kristall (Quelle: [3]).

### 1.2.3 Dispersionsrelation und Bandlücke

**Dispersionsrelation im Festkörper** Die Dispersionsrelation der Festkörperphysik  $E(\mathbf{k})$  gibt die Energie eines mit  $\mathbf{k}$  indizierten Einzelelektronenzustandes im Kristall an. Für ein freies Elektron gilt sicher

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (41)$$

und die Dispersionsrelation ist parabolisch. Was passiert nun, wenn sich die Elektronenwelle in einem periodischen Potential, wie es von Atomrümpfen erzeugt wird, ausbreitet? Durch eine ebene Welle kann das Elektron jedenfalls nicht mehr beschrieben werden. Damit stellt sich die Frage, was mit  $\mathbf{k}$  in der Dispersionsrelation gemeint ist.

Um dies zu erkennen betrachten wir den Fall eines Elektrons im eindimensionalen periodischen Potential  $U(x)$ . Entwickelt man sowohl das Potential, als auch die Wellenfunktion  $\Psi(x)$  in eine Fourierreihe, ergibt sich

$$U(x) = \sum_G U_G e^{iGx} \quad (42)$$

$$\Psi(x) = \sum_k C_k e^{ikx} \quad (43)$$

mit  $k = \frac{2\pi}{L}n$  bei periodischen Randbedingungen. Setzt man diese Relationen in die Schrödingergleichung

$$E\Psi(x) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) \right] \Psi(x) \quad (44)$$

ein, ergibt sich die *Hauptgleichung für ein Elektron im periodischen Potential* [3]

$$\left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E \right) C_k + \sum_G U_G C_{k-G} = 0 \quad (45)$$

Diese (theoretisch unendlich vielen) Gleichungen besagen folgendes: Fordern wir, dass ein Elektronenzustand eine ebene Welle mit Wellenvektor  $k$  enthalten soll (also  $C_k \neq 0$ ), wobei  $k$  die periodischen Randbedingungen erfüllt (im unendlich großen Kristall wäre also  $k \in \mathbb{R}$ ), dann sagt uns Gleichung (45), dass ein solcher Eigenzustand weitere Fourierkomponenten enthalten wird. Und zwar nur solche, deren Wellenvektoren um reziproke Gittervektoren verschoben sind. Wenn wir also sagen, das Elektron sei durch den Wellenvektor  $k$  indiziert ( $\Psi_k(x)$ ), so meinen wir damit einen Zustand, der als Fourierkomponente eine Ebene Welle mit  $k$  enthält. Ob diese Komponente dominant ist, oder von ebenso starken ebenen Wellen anderer Wellenvektoren überlagert wird, hängt davon ab, ob  $k$  in der Nähe der ersten Brillouin-Zone liegt oder nicht.

Wir bemerken weiterhin, dass das Gleichungssystem (45) unterbestimmt ist, und es daher eine Vielzahl (unendlich viele) verschiedener Lösungen zu einem gegebenen  $C_k \neq 0$  gibt. Diese verschiedenen Lösungen besitzen i.d.R. unterschiedliche Eigenenergien, weshalb  $E(k)$  streng

genommen keine Funktion ist. In der Dispersionsrelation macht sich dies durch eine Kaskade übereinanderliegender Dispersionszweige bemerkbar.

Eine weitere Bemerkung ist mit der Tatsache verknüpft, dass  $k + \Gamma'$  eine additive Gruppenstruktur aufweist und in Gl. (45) über alle Gruppenelemente  $k + G$  mit  $G \in \Gamma'$  summiert wird. Dies führt dazu, dass die Forderung  $C_k \neq 0$  und  $C_{k+G} \neq 0$  für einen beliebigen reziproken Vektor  $G \in \Gamma'$  die selbe Lösungsmenge und damit auch dasselbe Energiespektrum ergibt (letztlich wird nur die Reihenfolge der zu  $k$  gehörenden Zustände unterschiedlicher Energie permutiert).

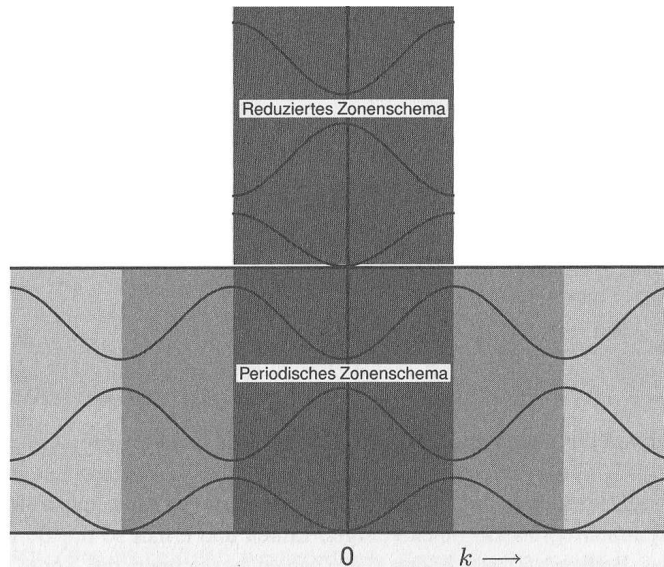


Abbildung 8: Vollständiges Zonenschema (unten) und reduziertes Zonenschema (oben). Hier für willkürlich gewählte, periodische Dispersionszweige. (Quelle: [3]).

Wie schon oben bemerkt, lassen sich alle Wellenvektoren  $k$  durch Addition reziproker Vektoren in die erste Brillouin-Zone überführen. Damit enthält die Dispersionsrelation außerhalb dieser Zone aber keine Informationen, die nicht auch für  $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$  vorhanden wären (hier für  $D = 1$ ). Konsequenterweise folgt die Darstellung der Dispersionsrelation im *reduzierten Zonenschema* (siehe Abb. 8).

**Bandlücke** Projiziert man in der Darstellung der Dispersionsrelation  $E(k)$  die Dispersionsäste auf die (senkrechte)  $E$ -Achse, so erzeugt dort jeder mögliche Zustand mit Wellenvektor  $k$  einen Punkt (man erinnere sich daran, dass im *endlichen* Festkörper nur diskrete  $k$ -Werte angenommen werden können). Die Dichte der Punkte ist ein Maß für die Zustandsdichte  $D(E)$ .

Nun führt die Störung freier Elektronen durch periodische Potentiale natürlich zu einer Abweichung der Dispersionsäste von dem parabolischen Verlauf, wie wir ihn für das freie Elektron erwarten. Speziell am Rand der Brillouin-Zone führt die Erfüllung der Bragg-Bedingung  $G = \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{a} - \frac{-\pi}{a} = k - k'$  zu einer starken Deformation der Dispersion, denn dort gilt  $k = -k'$  und es bildet sich eine stehende Elektronenwelle.

Diese stehende Welle ist gitterperiodisch und führt entweder zu einer erhöhten oder erniedrigten Elektronenkonzentrationen an den Orten der Atomrümpfe. Der erste Zustand weist eine niedrigere potentielle Energie auf, als der letzte, da hier die Elektronen im Mittel näher an den positiven Potentialzentren zu finden sind. Damit ergibt sich am Rand der Brillouin-Zone eine *Aufspaltung* zwischen zwei Dispersionszweigen (siehe z.B. Abb. 8).

Nach der Projektion der Zustände auf die  $E$ -Achse führen diese Aufspaltungen zu Energiebereichen mit verschwindender Zustandsdichte. Diese Bereiche nennt man *Bandlücken*, während die mit Zuständen besetzbaren Energieintervalle dazwischen als (*Energie-*)*Bänder* bezeichnet werden.

### 1.3 Analogie zwischen Quantenmechanik und Akustik

Im Grunde beschäftigt sich der im Folgenden behandelte Versuch nicht mit quantenmechanischen, sondern mit akustischen Phänomenen. Allerdings lassen sich im Hinblick auf die mathematische Beschreibung akustischer Phänomene viele Analogien zur Wellenmechanik der Quantentheorie finden. Diese Analogien sind nie exakt (dies scheitert schon an den unterschiedlichen Dispersionsrelationen), führen oft aber weit genug, um Charakteristika der quantenmechanischen Beschreibung eines Teilchens im klassischen Regime der Akustik beobachten zu können.

#### 1.3.1 Grundlagen der Akustik

Im allgemeinen Fall wird die Fluidodynamik (hier: die Dynamik von Gasen) durch die NAVIER-STOKES-GLEICHUNGEN beschrieben. Vernachlässigt man die innere Reibung und die Wärmeleitung (bei Gasen eine durchaus sinnvolle Annahme), ergeben sich die EULER-GLEICHUNGEN

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{0} \quad (46)$$

Diese entsprechen der Kontinuumsform des Impulssatzes. Linearisierung in  $\mathbf{v}$  liefert

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (47)$$

Mit der Dichte  $\rho$ . Letztere tritt auch in der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (48)$$

mit der Stromdichte  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  auf. Diese besagt (in differentieller Form), dass an keinem Punkt im Raum das Fluidum entstehen oder verschwinden kann. Eine Strömungsdivergenz wird nur durch Dichteänderungen möglich. Die Thermodynamik liefert nun den Zusammenhang

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\kappa \rho} \quad (49)$$

zwischen Druck  $p$ , Dichte  $\rho$  und (isothermer) Kompressibilität  $\kappa$ . Durch Einsetzen der Gleichungen 68, 48 und 49 ineinander sowie weitere Linearisierungen [6] ergibt sich schließlich die Wellengleichung der Akustik

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa} \Delta p \quad (50)$$

mit der Schallgeschwindigkeit  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa}}$ .

#### 1.3.2 Analogie zum Kastenpotential

Um das in Abschnitt 1.1 beschriebene Kastenpotential zu modellieren, betrachten wir ein Rohr mit verschlossenen Enden. Stehende Wellen mit longitudinalen Geschwindigkeitsknoten und Druckbäuchen an den Enden ergeben sich für

$$2L = n\lambda = n \frac{c}{\nu} \quad (51)$$

mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  und der Frequenz  $\nu$ , da eine Druckwelle nach Reflektion dann phasenrichtig mit sich selbst interferiert (vgl. Abb. 9). Um die Wellenfunktion zu erhalten ist Gl. (50) mit der NEUMANN Randbedingung  $0 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(z=0) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}(z=0)$  zu lösen (Randwertproblem mit gegebener Normalenableitung).

Ein Vergleich des quantenmechanischen Systems (Teilchen im Kasten) mit dem akustischen Analogon liefert für die Wellenfunktionen

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t} \leftrightarrow p(z, t) = \hat{p} \cos\left(n \frac{\pi}{L} z\right) \cos(\omega t) \quad (52)$$

Wir nehmen vereinfachend an, dass die Bewegung der Luft nur in  $z$ -Richtung erfolgt. Also gilt  $v_y = v_x = 0$  sowie  $v_z(\mathbf{r}) = v_z(z)$  und  $p(\mathbf{r}) = p(z)$ . Der Ansatz

$$p(z, t) = \hat{p} \cos(kz - \omega t + \phi_0)$$

mit der Druckamplitude  $\hat{p}$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi\nu$  sowie der Kreiswellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  beschreibt eine nach rechts laufende Welle. Die Randbedingungen sind aber nur mit einer stehenden Welle zu erfüllen. Dies gelingt mit der Superposition einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle

$$\begin{aligned} p(z, t) &= \frac{1}{2} \hat{p} \cos(kz - \omega t + \phi_0) \\ &+ \frac{1}{2} \hat{p} \cos(-kz - \omega t - \phi_0) \\ &= \hat{p} \cos(kz + \phi_0) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen  $\frac{\partial p}{\partial z}(0) = 0 = \frac{\partial p}{\partial z}(L)$  ergeben nach kurzer Rechnung die Parameter  $\phi_0 = 0$  und  $k = n \frac{\pi}{L}$  [4].

und für die Dispersionsrelationen

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad \leftrightarrow \quad \omega(k) = ck = \frac{\pi c}{L} n \quad (53)$$

Damit ergeben sich die folgenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede:

- Die Wellengleichungen unterscheiden sich in der zeitlichen Ableitung. Während die klassische Wellengleichung auf Grund der zweiten Zeitableitung periodische Lösungen besitzt, folgt dies im quantenmechanischen Fall aus der ersten Zeitableitung in Verbindung mit einem komplexen Phasenfaktor ( $i$ ).
- Die Lösungen sind in beiden Fällen stehende Wellen, deren Raum- und Zeitperiodizität durch harmonische Funktionen beschrieben wird. Im Gegensatz zum klassischen Fall ist die Lösung komplexwertig und daher nicht direkt beobachtbar – gemessen werden kann nur das Betragsquadrat der Lösung und auch dieses nur im Sinne statistischer Auswertungen.
- Wie oben dargestellt unterscheiden sich die Dispersionsrelationen grundlegend. Während die klassische Wellenmechanik durch lineare Zusammenhänge gekennzeichnet ist (konstante Schallgeschwindigkeit) gehorchen Materiewellen parabolischen Dispersionsrelationen. Dies führt u.A. zu anderen Verhältnissen von Gruppen- zu Phasengeschwindigkeit.
- In beiden Fällen finden wir Resonanzen des Systems (Eigenzustände bzw. Eigenfrequenzen) mit den selben, diskreten Wellenvektoren. Allerdings fordert die Stetigkeitsbedingung der Quantenmechanik eine verschwindende Wellenfunktion an den Enden der Röhre, während der Druck im klassischen Fall dort einen Schwingungsbauch aufweist.
- Während die Eigenfrequenz  $\omega$  im quantenmechanischen Fall ein Maß für die Energie des Zustandes ist, wird die Energie einer Schallwelle durch

$$W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \int_V \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} dV + \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV \quad (54)$$

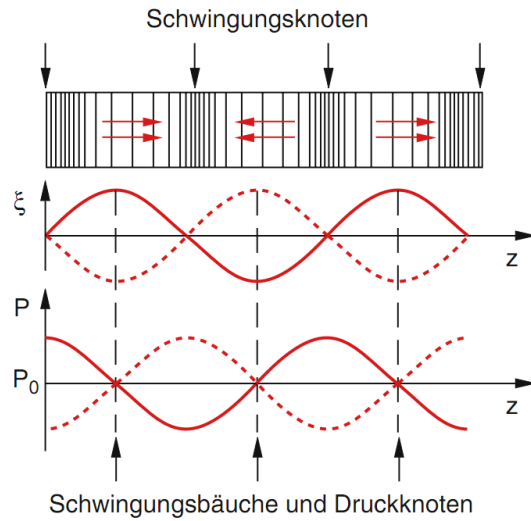


Abbildung 9: Schematische Darstellung der Schwingungsamplituden  $\xi$  und des Druckverlaufes  $P$  eines linear eingeschlossenen Gases (Quelle: [1]).

bestimmt. Diese hängt u.A. vom Schalldruck  $p$  ab, der in Grenzen frei gewählt werden kann (“laut”, „leise“). Damit lässt sich über die Frequenz im klassischen Fall nicht auf die Energie schließen. Obige Überlegung zeigt auch, dass im klassischen Fall keine Normierungsbedingung physikalisch erzwungen wird, da die Druckamplitude frei wählbar ist.

- Die Phase einer Schallwelle lässt sich mit Hilfe eines Mikrofons und eines Oszilloskops problemlos messen. Dies ist in der Quantenmechanik *direkt* nicht möglich, da nur das Betragsquadrat der Wellenfunktion experimentell zugänglich ist (allerdings lassen sich *relative* Phasenbeziehungen zwischen Wellenfunktionen durch Interferenzeffekte messen, vgl. Doppelspalt).

### 1.3.3 Analogie zum Wasserstoffatom

**Ungestörtes Problem** Betrachten wir einen sphärischen akustischen Resonator, so lassen sich die Schallwellen in seinem Inneren natürlich ebenfalls durch die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p \quad (55)$$

beschreiben. Die Zeitentwicklung lässt sich wie in der Quantenmechanik mit dem Ansatz  $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$  abseparieren und man erhält eine Gleichung in HELMHOLTZ Form

$$-\frac{\omega^2}{c^2} p(\mathbf{r}) = \Delta p(\mathbf{r}) = \left[ \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \right] p(\mathbf{r}) \quad (56)$$

Wie beim Wasserstoffatom führt eine Separation von Winkel- und Radialteil  $p(r, \vartheta, \varphi) = Y_l^m(\vartheta, \varphi) f(r)$  zum Erfolg. Die DGL zerfällt in zwei unabhängige Gleichungen

$$-l(l+1)Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (57)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} f(r) = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f(r) \quad (58)$$

Offensichtlich gleichen sich die Winkelanteile von Wasserstoffatom und sphärischem Resonator: Beide werden durch die Kugelflächenfunktionen beschrieben. Insofern herrscht völlige Analogie zwischen dem klassischen und dem quantenmechanischen System. Unterschiede ergeben sich hinsichtlich der radialen Abhängigkeiten. Wären die Radialfunktion im Wasserstoffproblem durch die *zugeordneten Laguerre-Polynome* beschrieben, erfüllen im klassischen Fall die *sphärischen Besselfunktionen* diese Aufgabe [5]. Würden wir als quantenmechanisches System nicht das Wasserstoffatom sondern das sphärische Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden betrachten, ginge die Analogie noch weiter, da in diesem Fall die sphärischen Besselfunktionen zur Beschreibung des Radialteils herangezogen werden. Da die Eigenenergien beim H-Atom und die Eigenfrequenzen beim sphärischen Resonator durch die Eigenwerte der radialen DGL gegeben sind, unterscheiden sich diese und sind nicht für eine Analogie geeignet. Allerdings lassen sich die einzelnen Resonanzen im klassischen System ebenfalls durch die Quantenzahlen  $n'$ ,  $l$  und  $m$  beschreiben, mit dem Unterschied, dass die beim Wasserstoffatom beobachtete Entartung aller Zustände mit gleicher Hauptquantenzahl  $n := l + n' + 1$  im akustischen Resonator nicht realisiert ist. Daher ist im klassischen Fall die aus der Atomphysik bekannte  $l$ -Entartung nicht realisiert. Die  $m$ -Entartung ( $2l + 1$  fache Entartung der Zustände unterschiedlicher magnetischer Quantenzahlen) ist hingegen auch im Fall des sphärischen Resonators zu beobachten. Hier gilt es aber zu beachten, dass im *ungestörten Fall* die Lage des Lautsprechers in der Cavity den Symmetriebruch bestimmt und daher eine “Quantisierungsachse” erzeugt. In der Folge regt der Lautsprecher fast ausschließlich die Zustände mit  $m = 0$  an.

**Gestörtes Problem** Wie schon erwähnt wurde und in [5] gezeigt wird, tritt in einem sphärischen Resonator eine  $m$ -Entartung der Eigenfrequenzen auf. Dies entspricht der  $m$ -Entartung der Energien im Wasserstoffatom. Diese lässt sich bekanntlich durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes  $B$

aufheben und führt zum sog. *Zeeman-Effekt*. Das Magnetfeld induziert hier einen Symmetriebruch und legt eine Quantisierungsachse fest. Auf ähnliche Art und Weise lässt sich durch Verlängern der sphärischen Cavity in eine Richtung eine Vorzugsachse herstellen und die Symmetrie wird gebrochen. Übrig bleibt ein rotationssymmetrisches System, dessen Eigenfrequenzen bei kleinen Deformationen nahe an denen des sphärisch symmetrischen Problem liegen müssen.

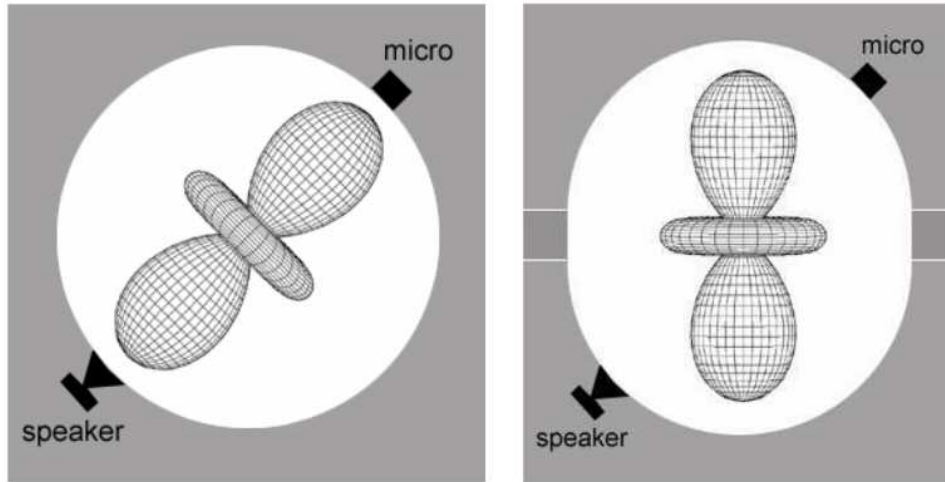


Abbildung 10: Ungestörtes Problem (links) und gestörtes Problem (rechts) mit der neu induzierten, senkrechten Symmetrieachse (Quelle: [4]).

Da der Lautsprecher im Versuch (siehe Abb. 10) nicht mehr auf der neu induzierten Symmetrieachse liegt, kann er nun auch Eigenmoden mit  $m \neq 0$  anregen. Allerdings wird die Entartung nicht völlig aufgehoben, da weiterhin sowohl eine Rotationssymmetrie (um die Symmetrieachse) als auch eine  $\mathbb{Z}_2$ -Symmetrie orthogonal zur Symmetrieachse (Spiegelung) besteht. Daher bleiben die Moden zu  $m$  und  $-m$  entartet. Hier endet übrigens die Analogie zum Zeemaneffekt. Bei diesem bricht das Magnetfeld durch seinen vektoriellen Charakter (die Quantisierungsachse hat einen "Pfeil") die  $\mathbb{Z}_2$ -Symmetrie was zur Aufhebung der  $\pm m$ -Entartung führt.

Wie man Anhand der Kugelflächenfunktionen sieht, führt die frequenzgleiche Superposition einer  $+m$ - und einer  $-m$ -Mode wegen

$$e^{im\varphi} + e^{-im\varphi} = 2 \cos(m\varphi) \tag{59}$$

zu einer stehenden Welle bezüglich  $\varphi$ . Hier fließt die Annahme ein, dass die Moden im symmetriegebrochenen Resonator näherungsweise durch die Kugelflächenfunktionen beschrieben werden können. Diese Modulation des Schalldrucks in azimuthaler Richtung mit von  $m$  abhängiger Periodizität lässt sich mit Hilfe eines passend angebrachten Mikrofons nachweisen.

### 1.3.4 Analogie zu periodischen 1D-Potentialen

Beginnen wir mit dem "leeren" Kristall als trivialen Fall, so finden wir uns im Kastenpotential wieder. Hier führt die Endlichkeit zu einer Diskretisierung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$ . Im Grenzfall unendlich großer Kristalle bzw. Resonatoren verringern sich die Schritte zwischen zwei erlaubten Wellenvektoren bis  $|\mathbf{k}| \in \mathbb{R}$  gilt. Hier können wir die kontinuierlichen Dispersionsrelationen für freie Elektronen bzw. freie Schallwellen angeben

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \leftrightarrow \omega(k) = ck \tag{60}$$

wie sie oben schon erwähnt wurden. Modifizieren wir den Röhrenresonator durch den Einbau periodischer Störungen (Iriden) erhalten wir ein System, dass viele der Effekte zeigt, die durch

das periodische Einbringen von Streuzentren in ein Kastenpotential hervorgerufen werden. Letzteres ist nichts anderes als ein Kristall, wobei die Streuzentren die Atomrümpfe des Gitters sind. Aus der Festkörperphysik wissen wir, dass Elektronen hauptsächlich am Rand der Brillouin-Zone streuen, wenn also  $\lambda = 2a$ . Daher vermuten wir, dass Periodizitäten im Bereich der halben Wellenlänge des verwendeten Schalls zu beobachtbaren Veränderungen der Dispersionsrelation führen ( $\rightarrow a \approx 5\text{cm}$ ). Weiterhin sollten sich im Spektrum des periodisch gestörten Röhrenresonators Bänder bilden, die auf Grund der endlichen Zahl von Elementarzellen (i.e. Iriden) aus jeweils endlich vielen Einzelresonanzen bestehen. Diese Messungen lassen sich mit Hilfe eines Lautsprechers am einen und eines Mikrofons am anderen Endes durchführen. In Analogie zur Festkörperphysik gibt es zwei Methoden das Auftreten der Bandstruktur im Frequenzspektrum des Resonators zu erklären:

1. **Elektronengas im periodischen Potential** Um den Effekt der Streuung einer Elektronenwelle an periodischen Streuzentren zu simulieren, beginnen wir mit einem (leeren) Röhrenresonator und nehmen dessen Resonanzspektrum auf. Dies entspricht einem im Kastenpotential eingeschlossenen Elektronengas. Durch das Einbringen von Blenden in periodischen Abständen werden die propagierenden Schallwellen gestreut und führen bei bestimmten Frequenzen zu (neuen) Resonanzpeaks im Spektrum die zur Bandstruktur führen. Die Blendengröße ist hier ein Maß für den Streuquerschnitt.
2. **Tight-Binding-Methode** Um die Bildung von Molekülorbitalen zwischen einer wachsenden Zahl von Einzelatomen zu simulieren, verbinden wir kleine Röhrenresonatoren über eine Blende zu einer Resonatorkette. Jeder Röhrenresonator für sich weist dieselben Moden auf (longitudinale und radiale) und dient hier als (ungenau)es Modell eines einzelnen Atoms. Die Analogie zu den Orbitalen eines einzelnen Atoms ist nur noch symbolisch zu verstehen, da wir keine sphärischen Resonatoren mehr benutzen. Die Größe der Blendenöffnung ist ein Maß für die Kopplungsstärke zwischen den Einzelsystemen (i.e. Atomen).

Die Bildung der (diskreten) Bänder kann nun durch sukzessive Erweiterung der Resonatorkette (beginnend bei einem einzelnen) beobachtet werden. Jeder neue Resonator führt zu neuen bindenden und antibindenden Zuständen und damit zu weiteren Peaks innerhalb der Bänder. Durch die Wahl des Frequenzbereiches kann man erreichen, dass nur longitudinale Moden (also solche ohne Knoten in radialer Richtung) angeregt werden.

Beide Methoden führen letztendlich auf ein und dasselbe System und damit zum gleichen Spektrum. Sie unterscheiden sich lediglich im veranschaulichten Modell der Festkörperphysik.

### 1.3.5 Analogie der Linienverbreiterung

Im klassischen Fall des gedämpften, getriebenen harmonischen Oszillators (als solchen kann man die Druckschwingungen im nahresonanten Bereich modellieren)

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\gamma\frac{dp}{dt} + \omega_0^2p = Ke^{i\omega t} \quad (61)$$

findet man auf Grund der Dämpfung eine Abhängigkeit der Amplitude von der Erregerfrequenz [4] (im ungedämpften Fall divergiert diese, Resonanzkatastrophe). Als (reelle) Lösung erhält man eine Linearkombination aus der abklingenden homogenen Lösung sowie einer Partikulärlösung

$$p(t) = \hat{p}_d e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi_d) + \hat{p} \cos(\omega t + \phi) \quad (62)$$

mit der *gedämpften Eigenkreisfrequenz*  $\omega_d$  und der Treiberfrequenz  $\omega$ . Wartet man den Einschwingvorgang ab, so spielt die homogene Lösung auf Grund der Dämpfung keine Rolle mehr und man kann die (komplexe) Amplitude der (komplexwertigen) Lösung  $p_s(t) = \hat{p} e^{i(\omega t + \phi)}$  für lange Zeiten nähern als

$$\hat{p} = \frac{Ke^{i\phi}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2i\gamma\omega)} \quad \Rightarrow \quad |\hat{p}| = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (63)$$

mit der *ungedämpften Eigenkreisfrequenz*  $\omega_0$  des Oszillators. Die Realität zeigt nun, dass zeitgleich mehrere Resonanzen angeregt werden, jede mit der durch Gleichung (63) gegebenen Amplitude. Da diese Resonanzen kohärent überlagert werden folgt für die resultierende Amplitude

$$|A(\omega)| = \left| \sum_{i=0}^n \hat{p}_i(\omega) \right| = \left| \sum_{i=0}^n \frac{K_i e^{i\phi_i}}{(\omega_i^2 - \omega^2) + (2i\gamma_i\omega)} \right| \quad (64)$$

Mit den resonanzabhängigen Parametern  $K_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\omega_i$  und  $\gamma_i$ . Beim Durchfahren des Spektrums eines akustischen Oszillators misst man also  $|A(\omega)|$  und muss entsprechend alle angeregten Resonanzen berücksichtigen.

Führt man noch einige physikalisch sinnvolle Näherungen aus, erhält man für die frequenzabhängige Amplitude

$$\hat{p} \propto \frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} \Rightarrow |\hat{p}| \propto \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}} \quad (65)$$

Vergleicht man nun die quantenmechanische Energieverbreiterung  $|A(\omega)|$  (und damit Frequenzverbreiterung) für nahresonante  $\omega \approx \omega_0$  Frequenzen mit dem klassischen Analogon  $|\hat{p}(\omega)|$

$$|A(\omega)| \propto \frac{2\omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \leftrightarrow |\hat{p}(\omega)| = \frac{C}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}} \quad (66)$$

so stellt man weitgehende Übereinstimmung fest (siehe Abb. 11).

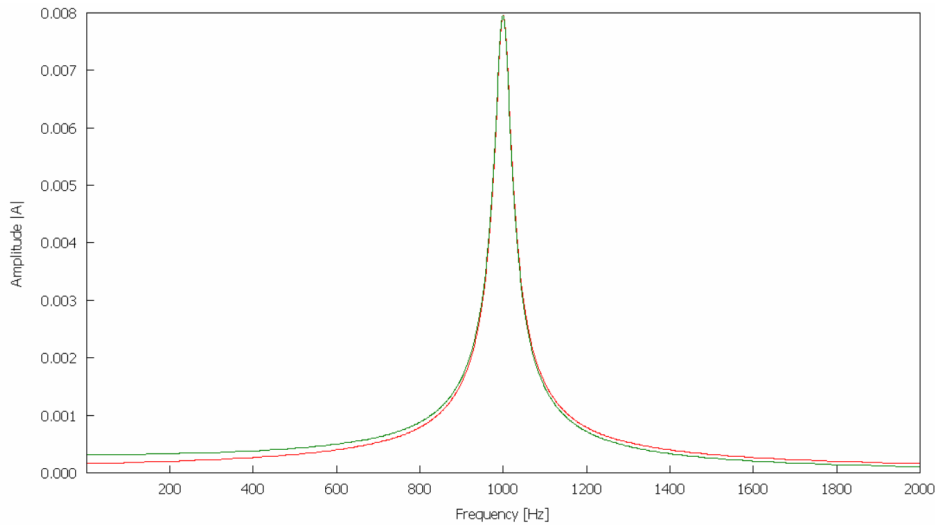


Abbildung 11: Resonanzverbreiterung im klassischen Fall (grün) und für ein quantenmechanisches System endlicher Lebensdauer (rot) (Quelle: [4]).

Damit lässt sich das Abfallverhalten der Amplitude eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators für nichtresonante Frequenzen als Veranschaulichung der Linienverbreiterung auf Grund endlicher Beobachtungszeiten in quantenmechanischen Systemen gebrauchen. Dies und die Beobachtungen im vorherigen Abschnitt etabliert die Analogie zwischen *Frequenzspektrum* des akustischen Resonators und *Energiespektrum* des quantenmechanischen Systems – trotz der fehlenden Verbindung von Energie und Frequenz im klassischen Fall.

## 2 Auswertung und Versuchsbeschreibung

### 2.1 Röhrenresonatoren als Modell des 1D Kastenpotentials

**Versuchsbeschreibung** In diesem Abschnitt sollen die Spektren von Röhrenresonatoren untersucht werden. Im Speziellen werden Aluminiumröhren der Längen  $L = 600$  mm und  $L = 150$  mm verwendet, in deren Endkappen ein Mikrofon bzw. ein Lautsprecher eingelassen ist. Die Röhren sind mit Raumluft gefüllt und können aus Elementen der Länge 7.5 cm und 5 cm zusammengesetzt werden.

Um die akustischen Spektren aufzunehmen, wird der Lautsprecher über eine Soundkarte mit Frequenzen in einstellbaren Frequenzschritten angesteuert. Die vom Mikrofon gemessenen Schallamplituden (AC Signal) werden vorverstärkt und anschließend manuell abgeschwächt (*Attenuator*) um einem Übersteuern entgegenzuwirken. Dieses Signal wird von der Soundkarte aufgenommen und mit Hilfe einer Software als Spektrogramm grafisch dargestellt.

Im ersten Teil dieses Abschnittes messen wir das Spektrum (Schrittweite  $\Delta\nu = 10$  Hz) einer  $L = 600$  mm Röhre aus um anhand der Resonanzen die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen. Im zweiten Teil nehmen wir ein hochaufgelöstes Spektrum ( $\Delta\nu = 5$  Hz) einer  $L = 150$  mm Röhre auf und fitten an die Resonanzen das in den Grundlagen beschriebene Modell der Linienverbreiterung an. Mit Hilfe der Fitparameter bestimmen wir anschließend die Güte des Resonators. Abschließend untersuchen wir, inwieweit sich das Spektrum aufeinanderfolgender Messungen verändert und mit welchen Effekten sich mögliche Veränderungen erklären lassen.

#### 2.1.1 Resonanzen einer Röhre

Wie in den Grundlagen dargelegt ist die akustische Resonanzbedingung in der gasgefüllten Röhre

$$2L = n \frac{c}{\nu} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (67)$$

Demnach erwartet man in äquidistanten Frequenzintervallen  $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$  Peaks im Spektrum des Resonators, was sich experimentell auch bestätigen ließ, wie man anhand des in Abb. 12 abgebildeten Spektrums sieht. Hier gilt es zu beachten, dass bei  $\nu_s = 368$  Hz eine Geräteresonanz auftritt, welche im Spektrum zu einer Überlagerung der ersten Resonanzen führt. Diese ist im Plot mit einem Pfeil hervorgehoben. Aus diesem Grund werden bei der folgenden Auswertung nur die Resonanzen für  $n \geq 3$  benutzt (rot markiert in Abb. 12).

Um mit Hilfe der Resonanzen die Schallgeschwindigkeit von Luft zu berechnen, werden deren Frequenzen einfach über die Indexnummer  $n$  – die Nummer des Peaks – aufgetragen, denn es gilt

$$\nu(n) = \frac{c}{2L} \cdot n \quad (68)$$

In Abb. 13 sind die Resonanzfrequenzen über ihre Indexnummer  $n$  aufgetragen. Aus den oben genannten Gründen beginnen die Datenpunkte erst bei  $n = 3$ . Wir setzen die Fitfunktion

$$\mathcal{F}_c(n) = \frac{c}{2 \cdot 0.6} \cdot n \quad (69)$$

an und erhalten den Fitparameter  $c = 0.34639$ . Unter Beachtung der Achsenskalierung (kHz!) ergibt sich also die Schallgeschwindigkeit bei sommerlichen Raumtemperaturen ( $\sim 25^\circ\text{C}$ ) zu

$$c = 346.39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ein Vergleich mit dem Literaturwert  $c^* = 346.39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [7] für  $T = 25^\circ\text{C}$  macht die Berechnung einer relativen Abweichung überflüssig. Die scheinbar exakte Übereinstimmung darf aber nicht überbewertet werden, da die Temperatur im Inneren des Resonators nicht gemessen wurde und die Annahme  $T = 25^\circ\text{C}$  nur eine (plausible) Schätzung darstellt. Dennoch legt die exakt lineare Verteilung der Messpunkte in Abb. 13 eine hohe Genauigkeit der gemessenen Schallgeschwindigkeit nahe.

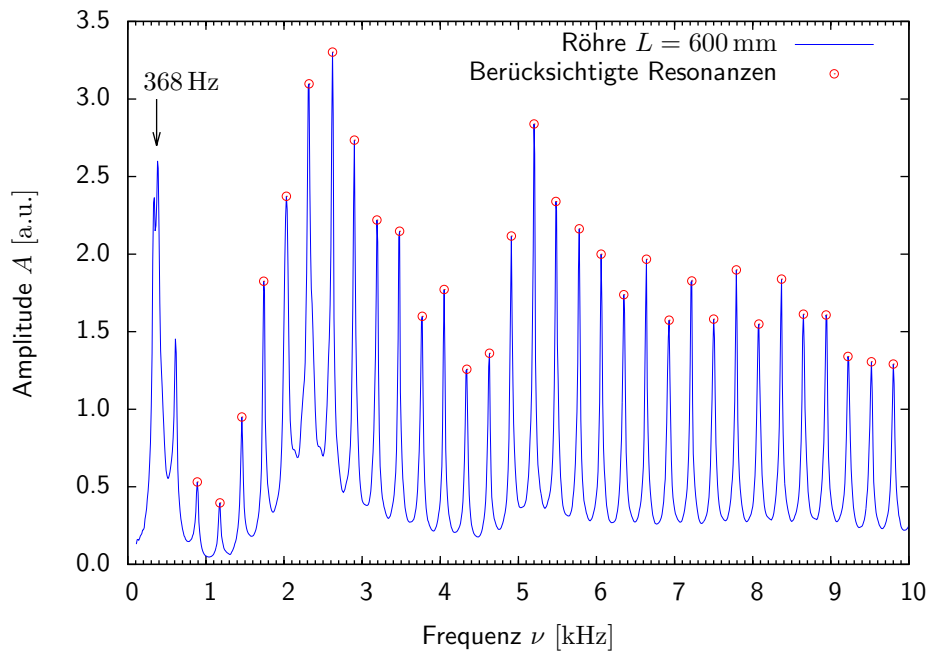


Abbildung 12: Spektrum der 600 mm-Röhre.

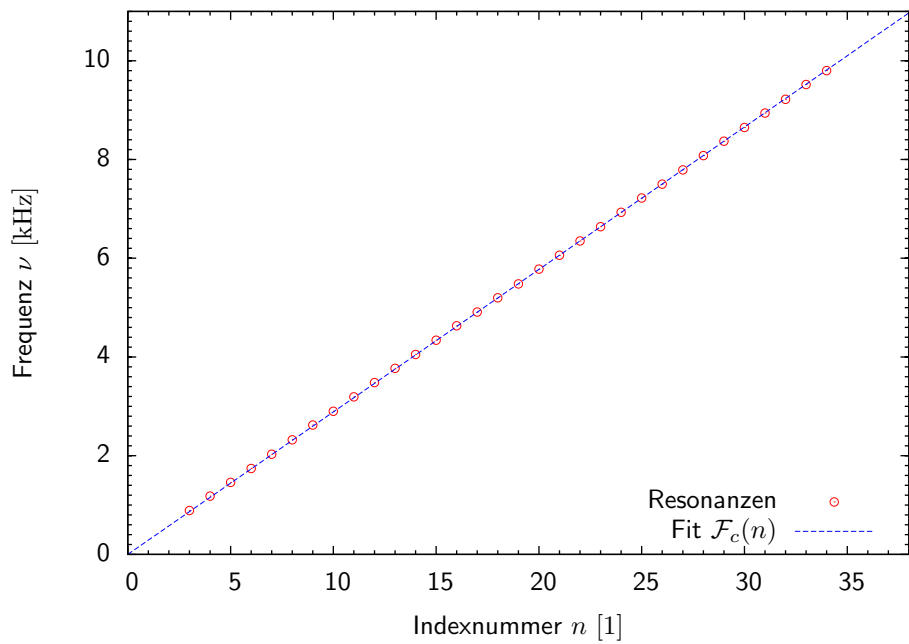


Abbildung 13: Resonanzfrequenzen der 600 mm-Röhre über der Indexnummer  $n$ .

### 2.1.2 Hochaufgelöstes Spektrum einer Röhre

Im Folgenden wird das Spektrum einer 150 mm-Röhre untersucht. In Abb. 14 ist eine Übersichtsspektrum der Röhre abgebildet. Auch hier fällt der Peak bei 368 Hz, der auf Grund seines Frequenzabstandes vom Ursprung nicht zu den (longitudinalen) Resonanzen der Röhre gehören kann. Im Vergleich zur 600 mm-Röhre sind die Resonanzen deutlich weiter voneinander entfernt, wie man es auf Grund des formalen Zusammenhangs (68) auch erwartet.

Im Folgenden werden die in Abb. 14 rot markierten Resonanzen näher untersucht.

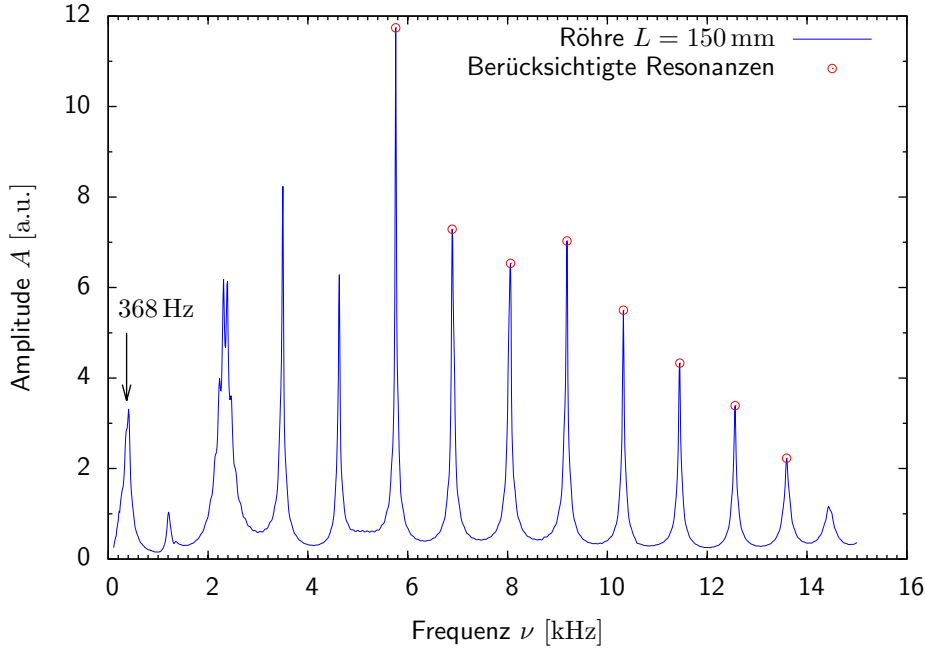


Abbildung 14: Übersichtsspektrum der 150 mm-Röhre.

**Bestimmung der Güte des Resonators** Abb. 15 zeigt die Messpunkte (rot) eines hochaufgelösten Spektrums der 150 mm-Röhre. Für den Fit wurde vom verwendeten Programm eine Funktion der Form

$$\mathcal{F}(\nu) = \left| \sum_{n=5}^{12} \frac{A_n e^{i\phi_n}}{((2\pi\nu_n)^2 - (2\pi\nu)^2) + (4\pi i \gamma_n \nu)} \right| \quad (70)$$

mit den resonanzabhängigen Fitparametern  $A_n$ ,  $\phi_n$ ,  $\nu_n$  und  $\gamma_n$  angesetzt.  $n$  läuft hier über die Indices der 8 beobachteten Resonanzpeaks, also  $n = 5, \dots, 12$ .

Wie man anhand von Abb. 15 erkennt, passt dieser Ansatz bis auf den linken Rand des beobachteten Ausschnittes sehr gut. Der Grund für die beschriebene Abweichung ist, dass das Spektrum nur einen Teil eines größeren Spektrums darstellt und die Peaks links außerhalb des beobachteten Bereichs einen Einfluss auf den Kurvenverlauf haben, während die angesetzte Fitfunktion diese Peaks *nicht* berücksichtigt.

In Tabelle 1 sind die Fitparameter  $A_n$ ,  $\phi_n$ ,  $\nu_n$  und  $\gamma_n^* = \frac{\gamma_n}{2\pi}$  für die 8 untersuchten Resonanzen aufgelistet. Gemäß [4] ergibt sich die *Full Width Half Maximum* zu  $\text{FWHM} = \sqrt{3} \frac{\gamma}{2\pi} = \sqrt{3} \gamma^*$ . Damit lässt sich die Güte des Resonators bestimmen. Diese ist für eine Resonanz definiert als

$$G_n = \frac{\nu_n}{\text{FWHM}_n} \quad (71)$$

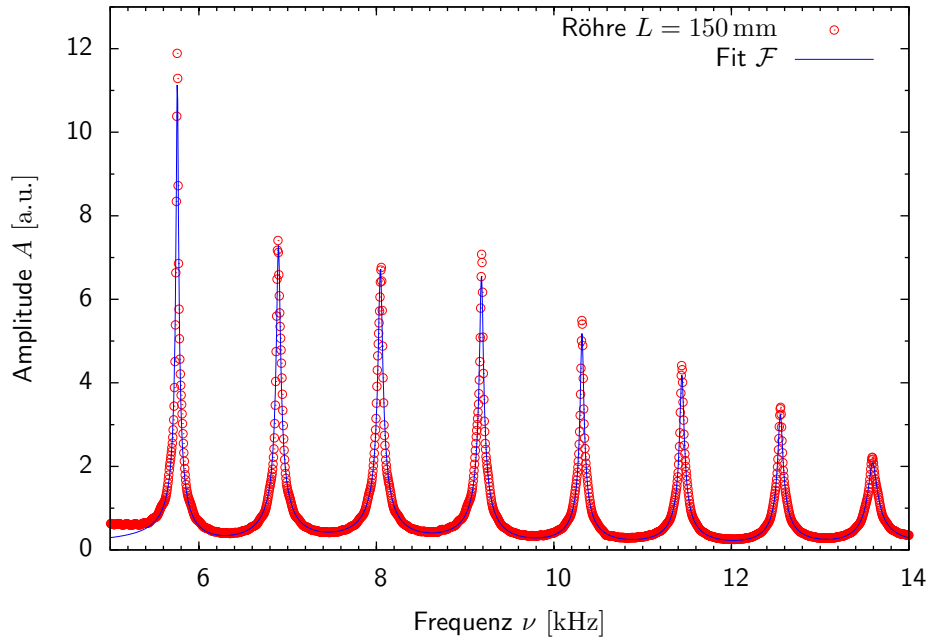


Abbildung 15: Hochaufgelöstes Spektrum der 150 mm-Röhre mit Fit basierend auf der Summe einer Lorentzkurve für jede Resonanz.

Sie ist also ein Maß für die Frequenzselektivität einer Resonanz. Die Güte  $\bar{G}$  des Resonators ergibt sich als arithmetisches Mittel aus den  $G_n$  der einzelnen Resonanzen. Wir finden

$$\bar{G} \approx 240$$

Peakindex $n$	Frequenz $\nu_n$	Amplitude $A_n$	Breite $\gamma_n^*$	FWHM $_n$	Phase $\phi_n$	Güte $G_i$
[1]	[Hz]	[a.u.]	[Hz]	[Hz]	[°]	[1]
5	5,756.45	10.97	13.49	23.36	-92.00	246.40
6	6,895.63	7.01	21.51	37.25	-57.76	185.12
7	8,044.87	6.42	24.29	42.07	-12.10	191.20
8	9,183.37	6.34	21.38	37.03	39.31	248.01
9	10,316.50	5.13	19.46	33.70	107.00	306.12
10	11,442.31	4.17	23.16	40.11	-51.00	285.27
11	12,551.45	3.09	27.39	47.45	23.00	264.54
12	13,590.50	1.95	49.08	85.01	75.90	159.86
<b>Mittlere Güte <math>\bar{G}</math></b>					[1]	235.82

Tabelle 1: Fitparameter der komplexwertigen Komponenten der Fitfunktion  $\mathcal{F}$ .

**Reproduzierbarkeit der Messungen** Um die Reproduzierbarkeit der Messungen zu untersuchen wurden 3 hochaufgelöste Spektren der 8 Resonanzen im Abstand von  $\sim 5$  min aufgenommen und mit der oben beschriebenen Fitprozedur analysiert. Die Resonanz bei  $\sim 8$  kHz ist für die Messungen bei  $t_1 < t_2 < t_3$  in Abb. 16 dargestellt. Man erkennt eine leichte Rechtsdrift der Resonanzfrequenz. Das diese Drift der Resonanzfrequenzen  $\nu_n$  systematisch verläuft sieht man anhand der Auswertung in Tabelle 2 ein.

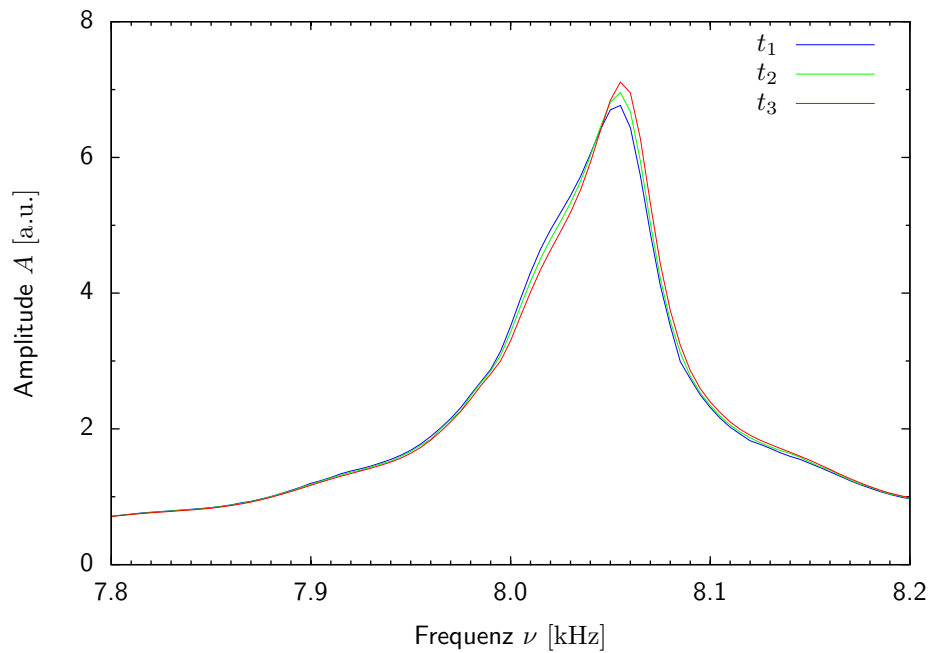


Abbildung 16: Ausschnitt der hochaufgelösten Spektren der 150 mm-Röhre in Zeitabständen von  $\sim 5$  min, also  $t_1 < t_2 < t_3$ .

Peakindex $n$	Resonanzfrequenzen						
	$\nu(t_1)$ [Hz]	$\nu(t_2)$ [Hz]	$\Delta\nu_{12}$ [Hz]	$\frac{\Delta\nu_{12}}{n}$ [Hz]	$\nu(t_3)$ [Hz]	$\Delta\nu_{23}$ [Hz]	$\frac{\Delta\nu_{23}}{n}$ [Hz]
[1]							
5	5,756.45	5,757.28	0.83	0.17	5,757.92	0.64	0.13
6	6,895.63	6,896.90	1.27	0.21	6,898.70	1.80	0.30
7	8,044.87	8,046.46	1.59	0.23	8,048.48	2.02	0.29
8	9,183.37	9,184.54	1.17	0.15	9,186.17	1.63	0.20
9	10,316.50	10,317.90	1.40	0.16	10,319.61	1.71	0.19
10	11,442.31	11,444.19	1.88	0.19	11,446.24	2.05	0.21
11	12,551.45	12,553.65	2.20	0.20	12,555.76	2.11	0.19
12	13,590.50	13,592.75	2.26	0.19	13,595.38	2.63	0.22

Tabelle 2: Resonanzfrequenzen dreier in Abständen von  $\sim 5$  min durchgeführter Messungen. Hier ist  $\Delta\nu_{12} = \nu(t_2) - \nu(t_1)$  und  $\Delta\nu_{23} = \nu(t_3) - \nu(t_2)$ .

Offensichtlich nehmen alle Resonanzfrequenzen um kleine Beträge zu, und zwar umso mehr je höher die Resonanzfrequenz selbst liegt. Betrachtet man das Verhältnis von Frequenzshift  $\Delta\nu_{ij} = \nu(t_j) - \nu(t_i)$  und Peakindex  $n$ , stellt man fest, dass dieses im großen und ganzen konstant bleibt. Auf Grund dieser Beobachtungen stellen wir folgende Hypothese auf: Wegen

$$c_{\text{Luft}} \approx 331.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{1 + \frac{T/^\circ\text{C}}{273.15}} \quad (72)$$

mit der Temperatur  $T$  in  $^\circ\text{C}$  [7] nimmt die Schallgeschwindigkeit mit steigender Temperatur zu. Sei nun  $c$  die Schallgeschwindigkeit zur Zeit  $t_i$  und  $\delta c$  die Zunahme der Schallgeschwindigkeit auf Grund der Erwärmung des Gases zur Zeit  $t_j > t_i$ . Dann folgt für die Resonanzfrequenzen

$$\Delta\nu_{ij}(n) = \nu(t_j) - \nu(t_i) = \frac{c + \delta c}{2L}n - \frac{c}{2L}n = \frac{\delta c}{2L}n \quad (73)$$

also auch  $\frac{\Delta\nu_{ij}(n)}{n} = \frac{\delta c}{2L}$  (unabhängig von  $n!$ ). Der beobachtete Shift der Resonanzfrequenzen lässt sich also mit großer Wahrscheinlichkeit auf die langsame, aber stetige Erwärmung der Aluminiumröhre und der enthaltenen Luft zurückführen. Die Erwärmung kam zum einen durch die steigende Temperatur im Labor selbst und zum anderen durch das Berühren der Röhren zustande.

## 2.2 Sphärischen Resonator als Modell des Wasserstoffatoms

**Versuchsbeschreibung** Ziel des folgenden Abschnittes ist die Ausmessung der Resonanzen eines sphärischen Resonators (i.e. einer Hohlkugel) und deren räumliche Struktur. Zu diesem Zweck benutzen wir einen aus einem Aluminiumblock herausgefrähten sphärischen Hohlraumresonator wie er schematisch in Abb. 10 dargestellt ist. Im  $45^\circ$ -Winkel zur senkrechten Achse sind in der oberen Hemisphäre ein Mikrofon und in der unteren ein Lautsprecher in die Resonatorwand eingelassen. Die Hemisphären sind drehbar am Äquator zusammengefügt und lassen sich mit Hilfe einer auf  $1^\circ$  genauen Winkelskala positionieren. Die Beschaltung von Mikrofon und Lautsprecher entspricht der beim Röhrenresonator.

Im ersten Teil dieses Versuches nehmen wir die Übersichtsspektren des Resonators für verschiedene Winkel zwischen oberer und unterer Hemisphäre auf um anschließend für drei ausgewählte Resonanzen in  $5^\circ$ -Schritten mit Hilfe eines Multimeters manuell die Schallamplitude von  $\alpha = 0^\circ$  bis  $\alpha = 180^\circ$  zu bestimmen. Eine Auswertung der Messpunkte mit Hilfe passender Legendre-Polynome erlaubt die Bestimmung der  $l$ -Quantenzahl der entsprechenden Resonanz.

Im zweiten Teil bestimmen wir alle  $l$ -Quantenzahlen der Resonanzen unter 10 kHz mit Hilfe einer polaren Auftragung der Amplitude und Vergleich mit den Polarplots berechneter Kugelflächenfunktionen. Hierfür wird die Funktion *Measure Wave Function* der Analysesoftware eingesetzt. Die Amplitudenmessungen erfolgen in  $10^\circ$ -Schritten.

Im letzten Versuchsteil brechen wir einen Teil der Symmetrie des Resonators, indem wir 3 mm und 6 mm starke Abstandsringe zwischen beide Hemisphären einfügen. Bei diesem gestreckten Resonator ergibt sich eine neue Quantisierungsachse entlang der (neuen) Symmetrieachse des Systems. Durch Ausmessen der  $l = 1$ ,  $l = 2$  und  $l = 3$  Resonanzen mit  $\Delta\nu = 5$  Hz untersuchen wir die Aufhebung der  $m$ -Entartung und analysieren den Zusammenhang der Aufspaltung  $\delta\nu$  der  $p$ -Welle in Abhängigkeit von der Ringdicke  $\delta$ .

**Bemerkung zu den Winkeln** Im Folgenden werden zwei verschiedene Winkel eine Rolle spielen. Die mit  $\alpha$  bezeichneten Winkel geben den direkt Abgelesenen zwischen den beiden Hemisphären des Resonators an. Bei  $\alpha = 0^\circ$  stehen Lautsprecher und Mikrofon gerade im rechten Winkel zueinander, während sie für  $\alpha = 180^\circ$  einander genau gegenüber stehen. Um den polaren Winkel  $\vartheta$  bezüglich der vom Mikrofon induzierten Symmetrieachse zu bestimmen, verwenden wir den in [4] hergeleiteten Zusammenhang

$$\vartheta = \arccos \left[ \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \right] \quad (74)$$

Erst wenn die Symmetrie gebrochen wird und die Symmetrieachse mit der senkrechten Achse durch beide Hemisphären übereinstimmt, gilt  $\vartheta = \alpha$  und obige Transformation entfällt.

### 2.2.1 Bestimmung der $l$ -Quantenzahlen

Abbildung 17 zeigt die Übersichtsspektren des Resonators für fünf verschiedene Winkel  $\alpha$ . Man erkennt, dass die Höhe der Peaks einzelner Resonanzen stark vom gewählten Winkel abhängt. Dies ist z.B. um 11.5 kHz herum deutlich zu sehen. Generell scheint die Amplitude für diametrale Positionen von Mikrofon und Lautsprecher (i.e.  $\alpha = 0^\circ$ ) größer zu sein als für andere Winkel. Diese Beobachtung lässt schon hier den Schluss zu, dass hauptsächlich  $m = 0$  Moden angeregt werden, da sich die zugehörigen Wellenfunktionen durch eine "Keule" in Richtung der Symmetrieachse auszeichnen.

Eine weitere Auffälligkeit ist die konstante Amplitude der ersten Resonanz im Spektrum. Da nur  $s$ -Wellenfunktionen, also  $l = 0$  Moden, eine vom Polarwinkel unabhängige Amplitude aufweisen, lässt sich sofort schließen, dass es sich um eine  $l = 0$  Resonanz handeln muss.

Die übrigen Resonanzen lassen sich aus Abb. 17 noch nicht bestimmen, da hier die polare Abhängigkeit der Amplitude nicht trivial ist.

Zu diesem Zweck wurde die polare Abhängigkeit der Schallamplituden mit Hilfe eines Multimeters für drei ausgewählte Resonanzen manuell bestimmt. Hierfür wurde die verstärkte, gleichge-

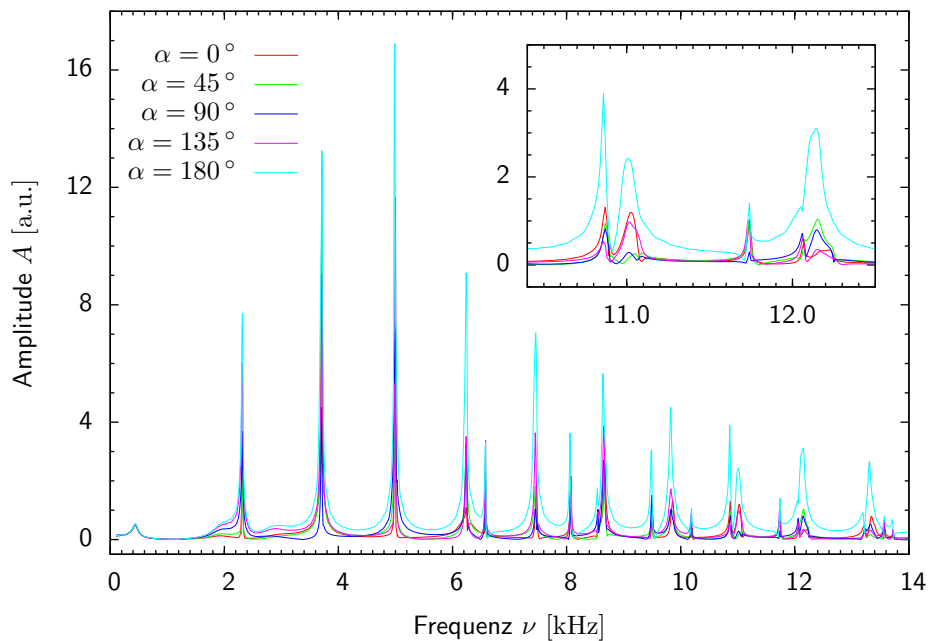


Abbildung 17: Übersichtsspektren des sphärischen Resonators für die Winkel  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ . Im Ausschnitt um  $11.5$  kHz herum erkennt man deutlich, dass die Amplitude vom Winkel abhängt.

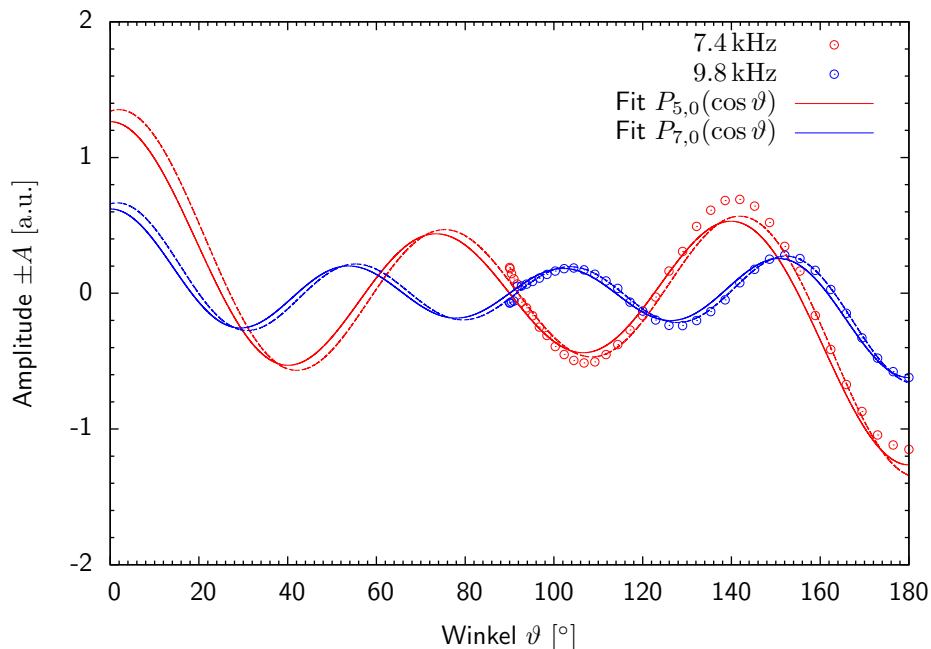


Abbildung 18: Winkelabhängigkeit der Resonanzen bei  $7.4$  kHz und  $9.8$  kHz. Die Fits mit durchgezogenen Linien haben als einzigen freien Parameter die Amplitude, während die gestrichelten Kurven einen Winkeloffset als zusätzlichen Fitparameter benutzen.

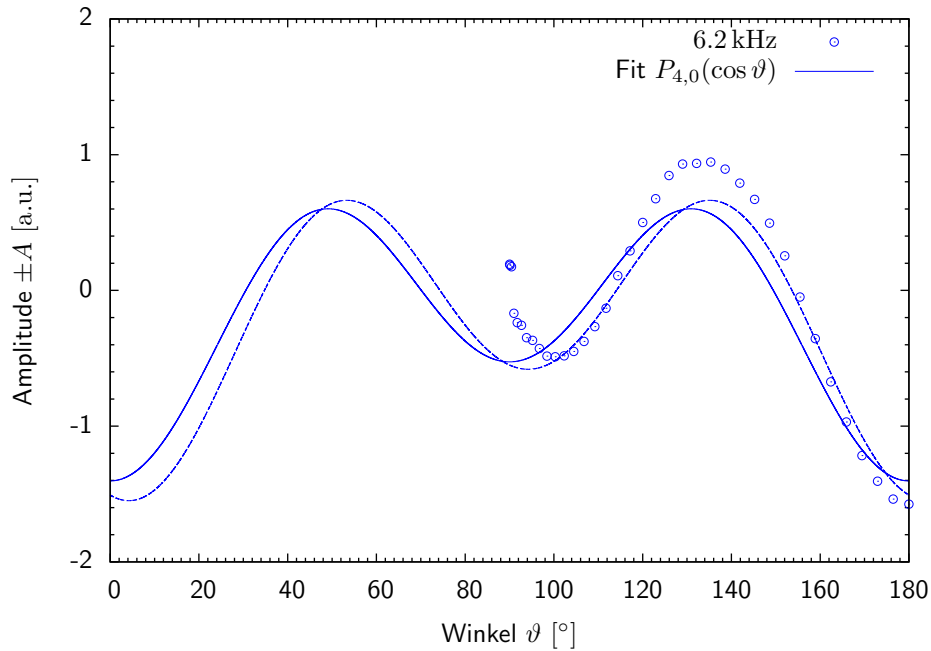


Abbildung 19: Winkelabhängigkeit der Resonanz bei 6.2 kHz. Der Fit mit durchgezogener Linie hat als einzigen freien Parameter die Amplitude, während die gestrichelte Kurven einen Winkeloffset als zusätzlichen Fitparameter benutzt.

richtete und geglättete Spannung vom Mikrophon in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha \in [0, \dots, 180]^\circ$  in  $5^\circ$ -Schritten gemessen.

Diese Spannung ist als Maß für die Amplitude in Abb. 18 für die Resonanzen bei 7.4 kHz und 9.8 kHz und in Abb. 19 für die Resonanz bei 6.2 kHz aufgetragen. Hierbei gilt es zu beachten, dass die gemessenen Spannungen proportional zum Betrag passender Legendre-Polynome  $P_{l,m}(\cos \vartheta)$  sein sollten.

Die gemessenen Winkel  $\alpha$  wurden mit (74) in den Polarwinkel  $\vartheta$  umgerechnet. Zudem wurde die Betragsbildung “invertiert” indem (zunächst willkürlich) negative Werte am rechten Rand bei  $\vartheta = 180^\circ$  angenommen und dann jeweils ein Vorzeichenwechsel bei Nullstellen durchgeführt wurde. Aus diesem Grund sind in Abb. 18 und 19 negative Amplituden aufgetragen, obwohl nur positive Spannungen gemessen werden konnten.

Um die  $l$ -Quantenzahlen der untersuchten Resonanzen zu bestimmen wurden passende Legendre-Polynome gewählt und an die Messwerte gefittet. Hierbei fließt die Annahme ein, dass es sich um  $m = 0$  Resonanzen handelt, da für diesen Fall die zugeordneten Legendre-Polynome den hier verwendeten “normalen” Legendre-Polynomen entsprechen.

Wie man mit Hilfe von Abb. 18 erkennt, passen die gemessenen Werte für die Resonanzen bei 7.4 kHz und 9.8 kHz zu den Legendre-Polynomen  $P_{5,0}$  und  $P_{7,0}$ . Damit handelt es sich um eine  $l = 5$  sowie eine  $l = 7$  Resonanz. Die Legendre-Polynome mit durchgezogenen Linien wurden ausschließlich mit der Amplitude als Fitparameter an die Werte angepasst, während die gestrichelten Kurven zusätzlich einen konstanten Winkeloffset als zweiten Freiheitsgrad zulassen um einem solchen (experimentell bedingten) zu kompensieren. In diesem Fall passen selbst die Fits ohne Winkeloffset gut zu den experimentellen Werten, sodass eine Identifizierung der  $l$ -Quantenzahl zweifelsfrei möglich ist.

Die Resonanz bei 6.2 kHz lässt keine eindeutige Bestimmung der  $l$ -Quantenzahl zu, wie man anhand von Abb. 19 erkennt. Die beste Übereinstimmung liefert das Legendre-Polynom  $P_{4,0}$  versehen mit einem Winkeloffset als Fitparameter. Auf Grund der grafischen Darstellung der zugehörigen

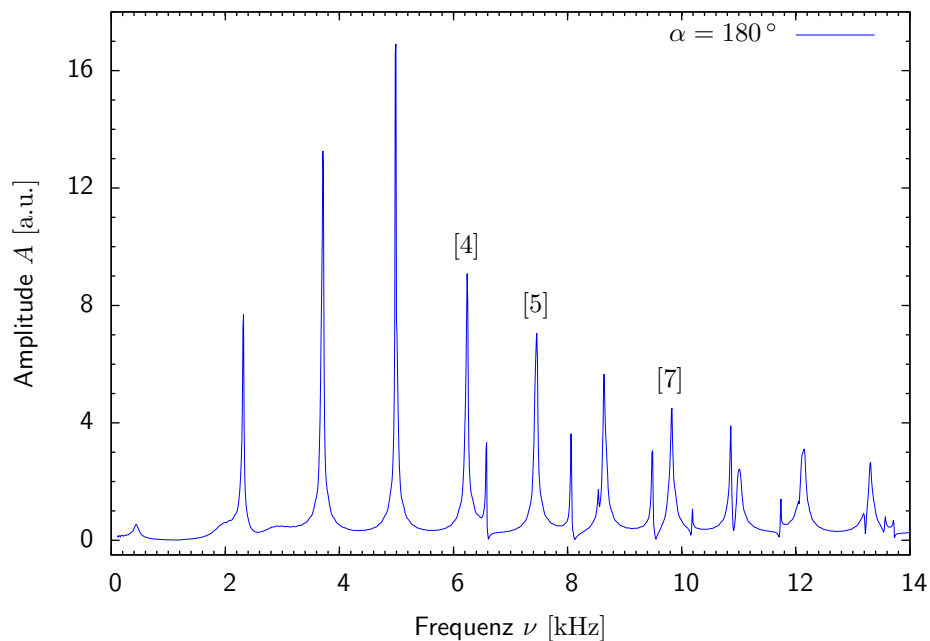


Abbildung 20: Übersichtsspektrum des sphärischen Resonators für den Winkel  $\alpha = 180^\circ$ . Die mit Hilfe der Legendre-Polynome bestimmten  $l$ -Quantenzahlen sind in eckigen Klammern eingetragen.

Wellenfunktion im nächsten Abschnitt lässt sich die Vermutung  $l = 4$  stützen. Dort erkennt man auch, dass es sich vermutlich um ein Interferenzphänomen unterschiedlicher frequenzgleicher oder zumindest frequenznaher Resonanzen handeln könnte. Dies würde erklären, weshalb kein einzelnes Legendre-Polynom den Verlauf der Messwerte reproduziert.

Abschließend ist in Abb. 20 das Spektrum des Resonators (für  $\alpha = 180^\circ$ ) abgebildet, wobei die untersuchten Resonanzen mit ihren  $l$ -Quantenzahlen gekennzeichnet sind.

### 2.2.2 Polare Darstellung der Wellenfunktionen

Um eine einfache Identifikation der Resonanzen des sphärischen Resonators zu ermöglichen wurden die Amplituden in Abhängigkeit vom Polarwinkel  $\vartheta$  automatisch aufgenommen und als Polarplot dargestellt (siehe Abbildungen 21 bis 32). Hierbei wurden die Winkel in  $10^\circ$ -Schritten durchlaufen. In den Abbildungen 21 bis 32 ist jeweils links die Messung am akustischen Modell und rechts der berechnete Betrag der zugehörigen Kugelflächenfunktion dargestellt. Anhand dieser und der zumeist augenscheinlichen Übereinstimmung mit der Theorie lässt sich dann die im vorherigen Abschnitt müßsam von Hand bestimmte  $l$ -Quantenzahl leicht ablesen.

Die ersten 8 Grafiken der Messungen zeigen zumeist gute Übereinstimmung mit einer bestimmten Kugelflächenfunktion. Hier bestätigt sich unsere Vermutung vom Anfang, dass auf Grund der Lage und Richtung des Lautsprechers (parallel zur Symmetrieachse)  $m = 0$ -Moden die dominanten Anregungen darstellen (alle dargestellten Computermodelle sind  $m = 0$  Kugelflächenfunktionen).

Für die folgenden Überlegungen rufe sich der Leser ins Gedächtnis, dass auch im akustischen Modell eine  $m$ -Entartung vorliegt. Angeregte  $m \neq 0$ -Moden schwingen also auf der selben Frequenz wie die dominanten  $m = 0$ -Moden.

Abweichungen von den Computermodellen finden sich bei den folgenden Resonanzen:

- Die  $\nu = 453$  Hz-Resonanz in Abb. 21 weist eine “verschmierte” horizontale Knotenebene auf. Das Füllen der Knotenebene ließe sich durch eine schwach angeregte  $m = \pm 1$ -Mode erklären, die bei  $\theta = \pm 90^\circ$  ein Amplitudenmaximum aufweist.
- Die  $\nu = 6268$  Hz-Resonanz in Abb. 25 zeigt auf den ersten Blick Charakteristika einer  $l = 5$ -Resonanz, allerdings passen weder Winkel noch Amplitude der Seitenkeulen. Weiterhin finden wir bei einer etwas höheren Frequenz eine Resonanz, die sich eindeutig als  $l = 5$  identifizieren lässt. Die Form der zwei innersten Keulen mit der “Kerbe” lässt auf einen Interferenzeffekt schließen. Betrachtet man die  $m = 2$ -Mode für  $l = 4$  so besitzt diese gerade eine Keule für  $\vartheta = 90^\circ$ . Stünde diese Mode in einer entsprechenden Phasenbeziehung zur  $m = 0$ -Mode könnte sie für die Auslöschung der Amplitude bei  $\vartheta = 90^\circ$  verantwortlich sein. Weiterhin sei bemerkt, dass dies gerade die im vorherigen Abschnitt nur schwer zu identifizierende (vermeindliche)  $l = 4$  Resonanz ist. Die Abbildung der Messung im Polarplot zeigt nun, dass es weder ein Messfehler war, noch Verwunderung auslösen sollte, wenn die zugehörigen manuellen Messpunkte nicht auf einem Legendrepolynom liegen, da die gemessene Wellenfunktion offensichtlich keine Einzelmode ist.
- Die  $\nu = 8684$  Hz-Resonanz in Abb. 27 lässt sich zwar recht eindeutig einer  $l = 6$  Kugelflächenfunktion zuordnen, zeigt interessanterweise aber eine abgeschwächte Version der eben besprochenen Störung im Fall  $l = 4$ . Auch hier führt eine “Kerbe” der innersten Keulen zur Abweichung vom Computermodell. Allerdings ist es hier eindeutig eine Spaltung einer *einzelnen* Keule während im vorherigen Fall nicht klar war, ob es nicht zwei unabhängige Keulen sind (i.e. eine  $l = 5$ -Mode).

Aufgrund der ähnlichen Signatur der Störung vermuten wir aber, dass sowohl bei  $\nu = 8684$  Hz als auch bei  $\nu = 6268$  Hz der selbe Mechanismus zur beobachteten Abweichung führt. Dies könnte auch hier eine schwach angeregte  $m \neq 0$ -Mode sein, die bei entsprechender Phasenbeziehung zu Interferenzeffekten führt.

Die größten Abweichungen ergeben sich für die Resonanzen in den Abbildungen 29 bis 32. Eingetragen im Übersichtsspektrum (siehe Abb. 33) wird deutlich, dass sich diese Resonanzen von den vorherigen unterscheiden, da diese vergleichsweise niedrige Amplituden aufweisen und zudem vom offensichtlichen Frequenzmuster der mit eckigen Klammern gekennzeichneten Resonanzen abweichen. Vermutlich handelt es sich hier um Anregungen höherer Hauptquantenzahlen (d.h. höhere radiale Moden). Während die Peaks mit eckigen Klammern vermutlich zu der Hauptquantenzahl  $n = 1$  gehören<sup>1</sup>, weisen die Peaks mit runden Klammern höhere Hauptquantenzahlen auf:

<sup>1</sup>Man beachte, dass im akustischen Modell die Beschränkung  $0 \leq l \leq n - 1$  nicht gilt, da die Radialgleichung im Vergleich um H-Atom eine andere Form hat [5]

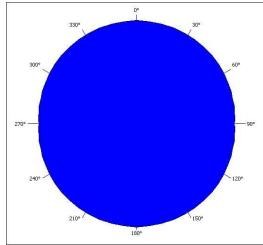


Abbildung 21:  $l = [0]$  bei  $\nu = 453$  Hz

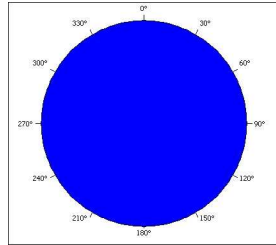


Abbildung 22:  $l = [1]$  bei  $\nu = 2324$  Hz

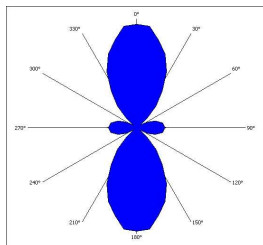
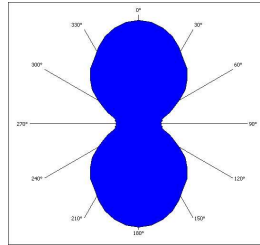


Abbildung 23:  $l = [2]$  bei  $\nu = 3727$  Hz

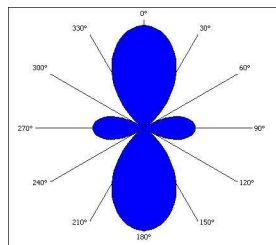


Abbildung 24:  $l = [3]$  bei  $\nu = 5036$  Hz

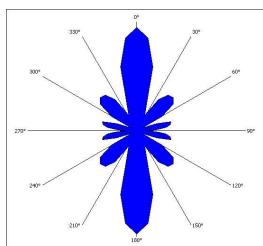
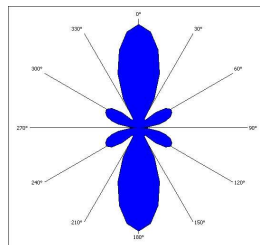


Abbildung 25:  $l = [4]$  bei  $\nu = 6268$  Hz

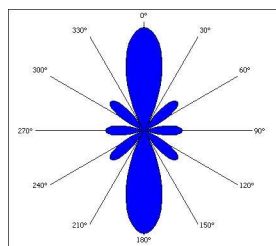


Abbildung 26:  $l = [5]$  bei  $\nu = 7484$  Hz

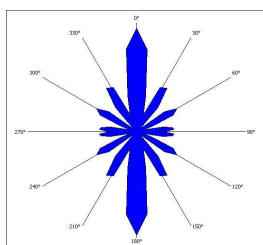
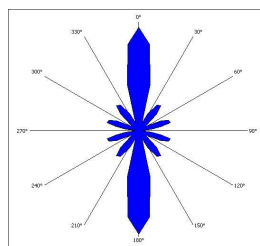


Abbildung 27:  $l = [6]$  bei  $\nu = 8684$  Hz

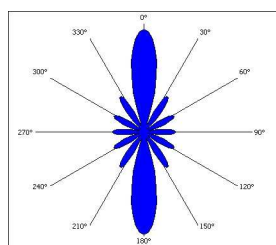
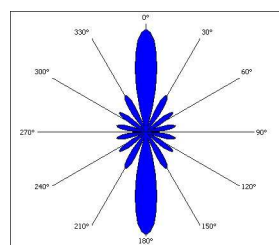
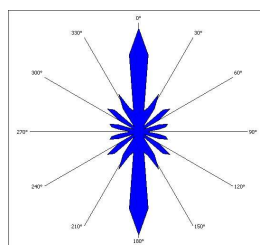


Abbildung 28:  $l = [7]$  bei  $\nu = 9853$  Hz



- Die  $\nu = 6611$  Hz-Resonanz in Abb. 29 entspricht im horizontalen Bereich dem Verlauf einer  $l = 1$  Mode, weicht im Vertikalen aber deutlich ab. Dies könnte entweder auf angeregte  $m \neq 0$ -Moden oder aber auf eine Sättigung in der Messkette zurückzuführen sein. Vergleichsrechnungen mit den Resonanzfrequenzen in [5] unter der Annahme von  $a = 5$  cm (der exakte Radius des von uns verwendeten Resonators ist nirgends dokumentiert) liefern eine gute Übereinstimmung mit einer  $n = 2, l = 1$  Mode.
- Die  $\nu = 8107$  Hz-Resonanz in Abb. 30 lässt sich vergleichsweise gut als  $l = 2$  Mode identifizieren. Diese lässt sich auf Grund der Frequenz und der Tabelle in [5] der radialen Quantenzahl  $n = 2$  zuordnen.
- Die  $\nu = 8589$  Hz-Resonanz in Abb. 31 fällt selbst aus der Frequenzstruktur der  $n = 2$  Resonanzen heraus. Dies legt die Vermutung nahe, dass es sich um eine  $n = 3$  Resonanz handelt. Der Vergleich mit [5] legt die s-Mode für  $n = 3$  (also  $l = 0$ ) nahe. Diese ist für die deformierte zentrale Fläche der Messung verantwortlich. Die keulenartigen Deformationen sind nicht auf die  $n = 3$  Mode sondern auf die benachbarte  $n = 1, l = 6$  Mode zurückzuführen.
- Die  $\nu = 9526$  Hz-Resonanz in Abb. 32 ist eindeutig eine  $l = 3$  Mode. Der Vergleich mit [5] verifiziert die Zugehörigkeit zur Hauptquantenzahl  $n = 2$ .

Damit konnten alle Resonanzen für  $\nu \leq 10$  kHz bestimmt werden (siehe Abb. 20). Für den Vergleich mit den Werten in [5] wurde die Formel

$$\nu_{n,l} = \frac{z_{n,l}c}{2\pi r} \quad (75)$$

zugrunde gelegt. Hier sind  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $r$  der Radius der Cavity und  $z_{n,l}$  die Nullstellen der Ableitungen der sphärischen Besselfunktionen. Für den Radius wurde  $r = 5$  cm angenommen.

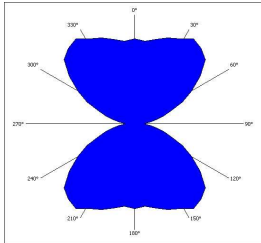


Abbildung 29:  $l = (1)$  bei  $\nu = 6611$  Hz

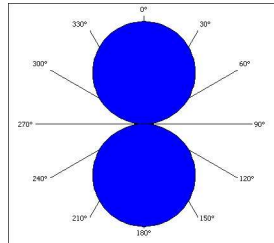


Abbildung 30:  $l = (2)$  bei  $\nu = 8107$  Hz

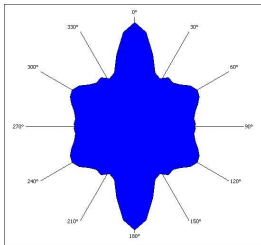
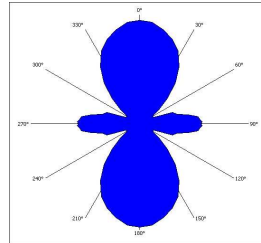


Abbildung 31:  $l = \{0\}$  bei  $\nu = 8589$  Hz

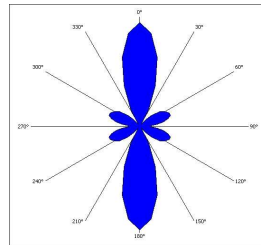
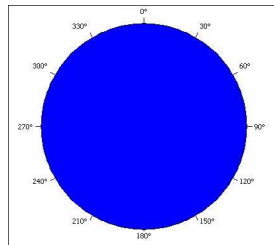


Abbildung 32:  $l = (3)$  bei  $\nu = 9526$  Hz

### 2.2.3 Spektren des sphärischen Resonators bei gebrochener Symmetrie

Wie schon in den Grundlagen beschrieben lässt sich die sphärische Symmetrie des Resonators brechen, indem er ‐verlängert‐ wird. Dies geschieht durch das Einfügen dünner Abstandsringe

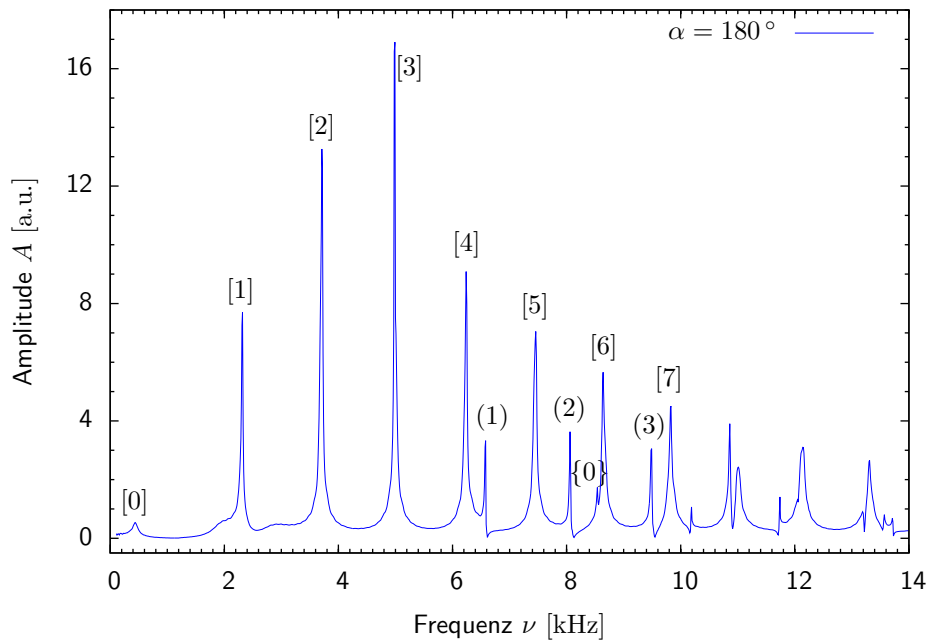


Abbildung 33: Übersichtsspektrum des sphärischen Resonators für den Winkel  $\alpha = 180^\circ$ . Die mit Hilfe der obigen Vergleiche bestimmten  $l$ -Quantenzahlen sind in eckigen Klammern eingetragen.

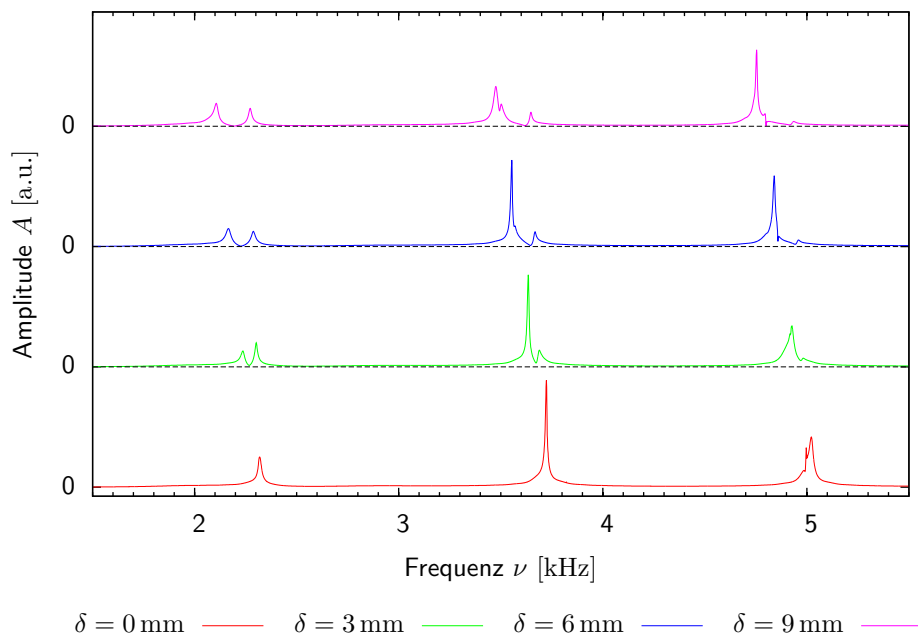


Abbildung 34: Übersichtsspektren des sphärischen Resonators für den Winkel  $\alpha = 180^\circ$  bei zunehmender Störung  $\delta$  der sphärischen Symmetrie.

zwischen beide Hemisphären. In unserem Fall waren diese 3 mm und 6 mm dick, sodass sich die Störungen  $\delta \in \{0, 3, 6, 9\}$  mm erzeugen ließen.

Die Spektren wurden für  $\alpha = 180^\circ$  aufgenommen. Da die Symmetrieachse nun entlang der senkrechten Achse durch beide Hemisphären verläuft und der Lautsprecher im  $45^\circ$ -Winkel zu dieser angebracht ist, werden auch  $m \neq 0$ -Moden verstärkt angeregt.

Im Laufe des Versuchs wurden die Spektren im Bereich von  $\nu \in [1.5, 5.5]$  kHz für die oben beschriebenen Störungen  $\delta$  aufgenommen. Diese sind in Abb. 34 dargestellt. Auf Grund unserer vorherigen Analysen wissen wir, dass es sich hier um die  $l = 1$ ,  $l = 2$  und  $l = 3$  Moden der Hauptquantenzahl  $n = 1$  handelt. Wir erwarten also Aufspaltungen in 2, 3 und 4 Moden (auf Grund der  $\pm m$ -Entartung). Die s-Welle für  $l = 0$  wurde absichtlich nicht aufgenommen, da hier natürlich keine Aufspaltung zu erwarten ist.

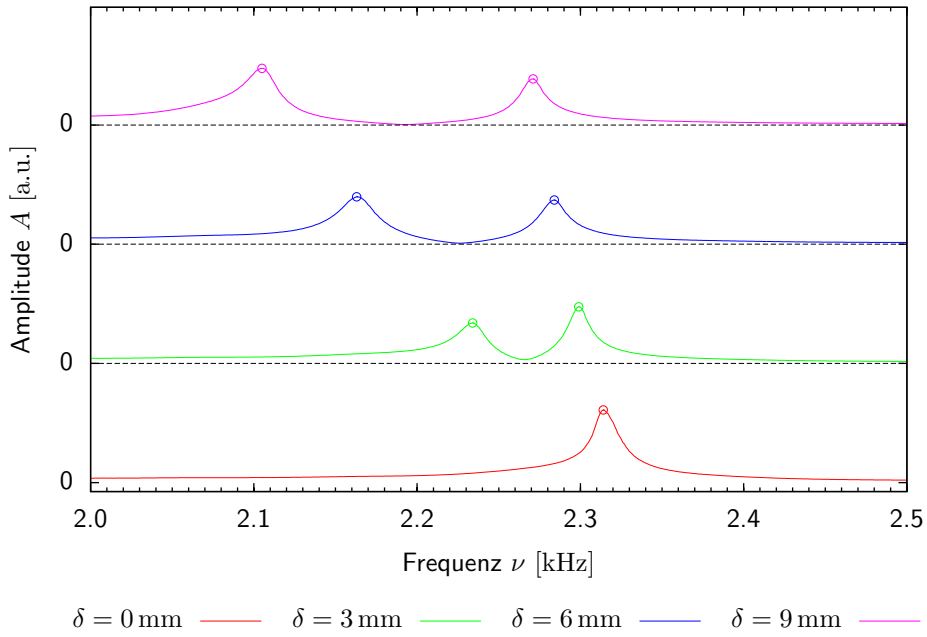


Abbildung 35: Detailspektren des sphärischen Resonators für den Winkel  $\alpha = 180^\circ$  bei zunehmender Störung  $\delta$  der sphärischen Symmetrie. Dargestellt ist die  $l = 1$  Resonanz.

Wie man anhand von Abb. 34 erkennt, bestätigen sich unsere Vermutungen im Rahmen der gewählten Auflösung und Intensität. Die Aufspaltung der p-Welle in zwei Zweige ist deutlich zu erkennen. Für höhere Störungen erkennt man auch die Aufspaltung der d-Welle in 3 Komponenten ansatzweise. Die Aufspaltung der f-Welle konnte nur bis zu 3 Komponenten erfolgen, da die Störung für eine weitere (auflösbare) Aufspaltung nicht groß genug war.

Im Folgenden ist nur die Aufspaltung der s-Welle von Bedeutung. Diese ist detailliert in Abb. 35 dargestellt. Die Maxima der beiden Resonanzen wurden markiert und in Abb. 36 gegen die Störung  $\delta$  aufgetragen. Man erkennt allerdings schon mit bloßem Auge, dass der Zusammenhang näherungsweise linear ist. Dies bestätigt sich in Abb. 36. Die gefittete Ursprungsgerade

$$\mathcal{F}_m(\delta) = m \cdot \delta \quad (76)$$

liefert eine Steigung von  $m = 19.1667$ . Wir erhalten also näherungsweise eine differentielle Aufspaltung von  $\frac{d\delta\nu}{d\delta} \approx 19 \frac{\text{kHz}}{\text{mm}}$ .

Die Analogie im quantenmechanischen Fall ist der *Zeeman-Effekt*, dessen Energieaufspaltung in erster Näherung ebenfalls linear zur Störung (i.e. dem Magnetfeld) verläuft:

$$\Delta E_B = \Delta m_J \mu_B g_J \cdot B \quad (77)$$

Im quantenmechanischen Fall ist die Linearität Folge der störungstheoretischen Behandlung des Problems. Auch hier im akustischen Fall gelten mit Sicherheit nichtlineare, exakte Zusammenhänge zwischen der Störung  $\delta$  und der Frequenzaufspaltung  $\delta\nu$ . Diese Nichtlinearität deutet sich u.U. schon im Plot 36 an, da eine Kurve mit negativer Krümmung den Messwerten etwas besser gerecht würde.

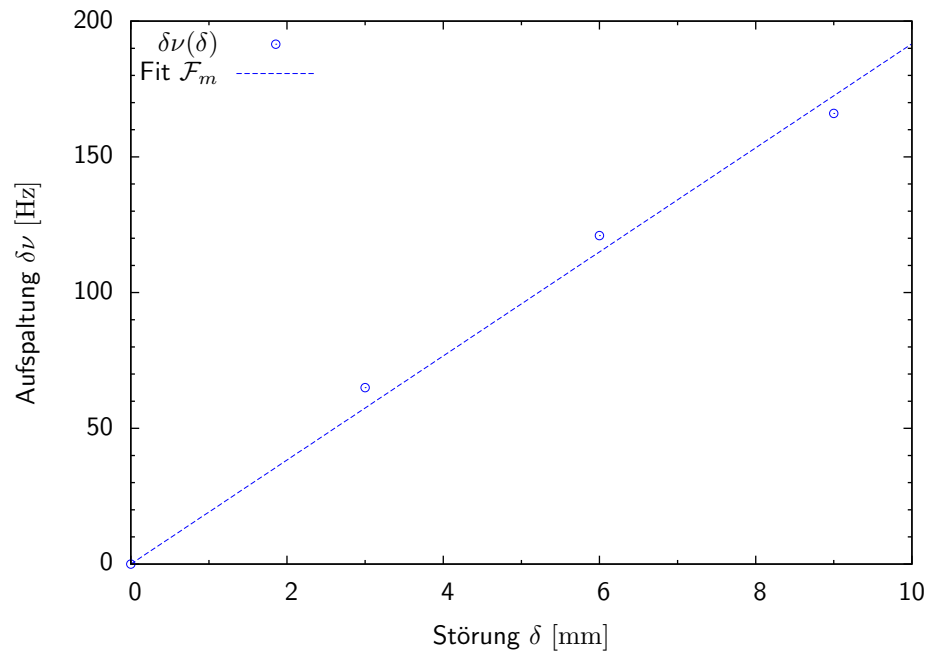


Abbildung 36: Abhängigkeit der Aufspaltung  $\delta\nu$  der  $l = 1$  Resonanz von der Störung  $\delta$ .

## 2.3 Lineare Resonatorketten als Festkörpermodell

**Versuchsbeschreibung** Im Folgenden werden Modelle 1-dimensionaler Festkörper untersucht, indem die Spektren periodischer Resonatoren ausgemessen werden. Hierfür stehen Röhrenresonatoren als “Elementarzellen” der Länge  $a \in \{5, 7.5\}$  cm zur Verfügung. Als Streuzentren werden Iriden mit den Durchmessern  $D \in \{16, 13, 10\}$  mm zwischen den Elementarzellen platziert. Am einen Ende der Resonatorkette ist ein Lautsprecher, am anderen ein Mikrofon in die jeweilige Endplatte eingelassen. Die Beschaltung von Mikrofon und Lautsprecher entspricht der in den beiden vorherigen Versuchsteilen.

Im ersten Teil bestimmen wir die Dispersionsrelation einer leeren 600 mm Röhre zu Vergleichszwecken. Im zweiten Teil bauen wir zwischen die Elementarresonatoren der Längen 5 cm und 7.5 cm jeweils eine Iride als Streuzentrum ein. Anschließend nehmen wir Übersichtsspektren ( $\Delta\nu = 10$  Hz) der Systeme für unterschiedliche Elementarzellenzahlen  $N$  und Iridendurchmesser  $D$  auf und vergleichen diese hinsichtlich Lage und Zahl der Resonanzen. Zudem zählen wir die Resonanzen und tragen deren Frequenz über die zugehörige Wellenzahl (als Index, vgl. *Blochwellen* in den Grundlagen) auf. Die so erzeugten Dispersionsrelationen werden ebenfalls verglichen.

Im dritten Teil bauen wir durch abwechselnde 13 mm und 16 mm Iriden ein Festkörpermodell mit Übergitter der Gitterkonstanten  $a' = 2a$  auf und analysieren die Veränderungen des Spektrums und der Dispersionsrelation auf Grund der neuen Periodizität.

Im letzten Versuchsteil fügen wir an verschiedenen Stellen einen Defekt in Form einer 7.5 cm Röhre in einem ansonsten aus 5 cm Röhren aufgebauten Festkörper ein und vergleichen die gemessenen Übersichtsspektren.

### 2.3.1 Resonanzen einer Röhre (600 mm)

Das Spektrum der 600 mm-Röhre wurde schon im ersten Teil dieses Versuches gemessen und ist in Abb. 12 abgebildet. Mit  $L = 0.6$  m und der sich aus den Randbedingungen ergebenden Relation

$$k = \frac{\pi}{L} \cdot n \quad (78)$$

für die Wellenzahl  $k$ , lässt sich die Dispersionsrelation von Schall im untersuchten Resonator ermitteln.  $\nu = \nu(k)$  ist in Abb. 37 aufgetragen. Da die Dispersionsrelation offensichtlich linear ist, liefert der Fit-Ansatz

$$\mathcal{F}_d(k) = d \cdot k \quad (79)$$

den Fitparameter  $d = 5.51297$ . Damit lautet die Dispersionsrelation

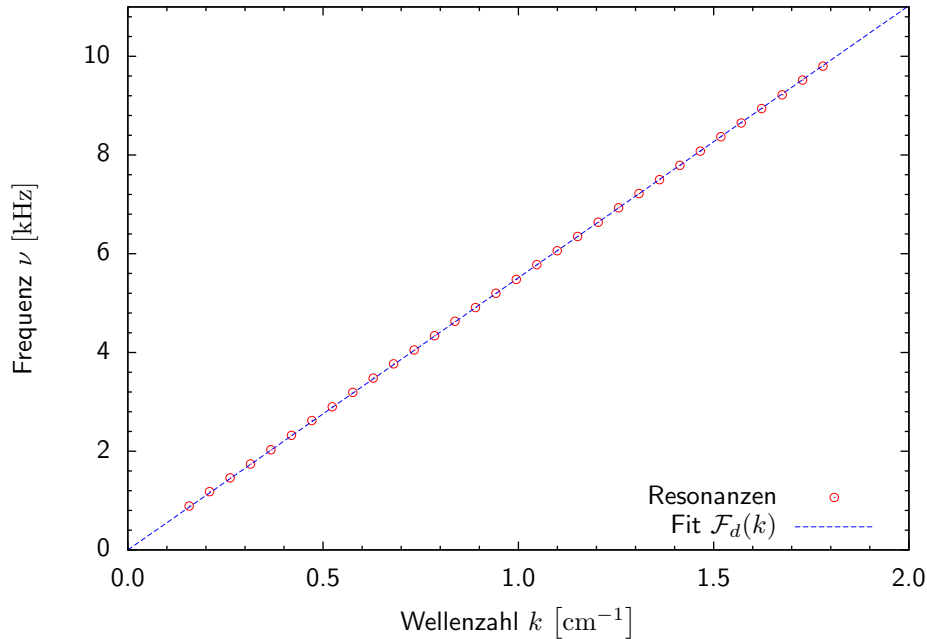
$$\nu = 55.1297 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot k \quad \text{oder} \quad \omega = 346.39 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot k$$

was natürlich auch aus den Daten der Auswertung des ersten Versuchsteiles folgt. Die Dispersionsrelation der Röhre ohne Streuzentren ist also linear und deckt das Frequenzspektrum mit äquidistanten Zuständen ab. Die Zustandsdichte ist also konstant und echt größer Null.

### 2.3.2 Spektren 1-dimensionaler Festkörper

**Abhängigkeit von der Gitterkonstante** Um die Abhängigkeit der Spektren und Dispersionsrelationen von der Gitterkonstanten  $a$  zu untersuchen, nehmen wir die Spektren eines Systems aus  $8 \times 5$  cm Röhren und eines Systems aus  $8 \times 7.5$  cm Röhren mit jeweils  $7 \times 16$  mm Iriden auf (im Folgenden verwenden wir die Systembeschreibung  $\#$ Röhren  $\times \frac{a}{\text{cm}}$  |  $\#$ Iriden  $\times \frac{D}{\text{mm}}$ ).

In Abb. 39 ist das Spektrum des  $8 \times 5$  |  $7 \times 16$ -Systems abgebildet. Im Vergleich zu 12 erkennt man deutlich eine Bandstruktur mit Bändern in denen Moden existieren und Bandlücken, in welchen keine Eigenresonanzen des Systems beobachtbar sind. Bei 368 Hz befindet sich eine Resonanz die auf die Kombination von Mikrofon und Lautsprecher zurückzuführen ist und im Folgenden ignoriert wird [4], wenn sie nicht zufällig mit einer Resonanz der Kette zusammenfällt (wie es in Abb. 39 der Fall ist).

Abbildung 37: Resonanzfrequenzen der 600 mm-Röhre über der Wellenzahl  $k$ .

Man beobachtet im ersten Band 7 Resonanzen und in den nächsten drei Bändern jeweils 8 Resonanzen. Im fünften Band ist die erste Resonanz offensichtlich zu schwach um aufgelöst werden zu können. Dieses Band weist folglich auch 8 Resonanzen auf. Dies lässt schon hier die Vermutung aufkommen, dass die Anzahl der Zustände pro Band gerade der Zahl der Elementarzellen entspricht und das erste Band einen Zustand weniger aufweist. Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Um die Dispersionsrelation des Systems aufzustellen, müssen wir den Index der Resonanz  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  mit dem Wellenvektor der Mode in Verbindung bringen. Dies geschieht über die Randbedingung

$$k = n \frac{\pi}{L} \quad (80)$$

wobei  $L = Na$  mit der Anzahl der Elementarzellen  $N$ . Beim Abzählen der Resonanzen ist darauf zu achten, dass die nicht mehr beobachtbaren Peaks für höhere Bänder interpoliert, also mitgezählt werden müssen.

Die Frequenzen der in Abb. 39 rot markierten Resonanzen werden in Abb. 40 über die Wellenzahl  $k$  aufgetragen (blau, positive  $k$ -Achse). Da das System neben der Rotationssymmetrie eine  $C_2$ -Symmetrie (Spiegelung an der Ebene senkrecht zur Resonatorkette) aufweist, spiegeln wir die Messwerte in den Halbraum negativer Wellenzahlen. Diese Darstellung wird *erweitertes Zonenschema* genannt. In der Grafik sind die Ränder der Brillouin-Zonen mit durchgezogenen Linien markiert. Durch Verschieben der Dispersionsäste höherer Brillouin-Zonen in die Erste erhält man das (rote) *reduzierte Zonenschema*. Die gestrichelten Linien markieren die Mitten der Brillouin-Zonen. Daher sind zwei senkrechte Linien (gestrichelt oder durchgezogen) immer bei ganzzahligen Vielfachen von  $\frac{\pi}{a}$  gelegen.

Man erkennt in der Dispersionsrelation die (grau hervorgehobenen) Bandlücken und die (weißen) Bänder mit nicht verschwindender Zustandsdichte. Die Dispersionsäste selbst sind näherungsweise linear, was auf die lineare Dispersion des Schalls im freien Raum zurückzuführen ist. Dennoch verringert sich die Steigung der Äste mit zunehmender Bandnummer, was auf eine Änderung der Schallgeschwindigkeit bei Änderung des Bandindex hinweist.

In Abb. 41 ist das Spektrum des  $8 \times 7.5 | 7 \times 16$ -Systems abgebildet. Auch hier sieht man deutlich die zustandsfreien Bandlücken und die mit jeweils 8 Zuständen besetzten Bänder (7 Zustände im ersten Band). Allerdings liegen die Resonanzen generell bei niedrigeren Frequenzen, sodass die ersten fünf Bänder alle unter 10 kHz zu liegen kommen. (siehe Abb. 38 für einen expliziten Vergleich der beiden Spektren).

Dies wirkt sich natürlich auf die Breite der ersten Brillouin-Zone aus (siehe Abb. 42). Während diese im Festkörper mit  $a = 5 \text{ cm}$  ca.  $12 \text{ cm}^{-1}$  breit ist, führt die größere Gitterkonstante  $a = 7.5 \text{ cm}$  zu einer schmäleren Brillouin-Zone mit einer Breite von ca.  $8 \text{ cm}^{-1}$ . Auch hier öffnen sich die Bandlücken im Abstand halber reziproker Gittervektoren  $\frac{\pi}{a}$ , also jeweils am Rand und in der Mitte der Brillouin-Zonen. An diesen Stellen im reziproken Raum erfüllen die Schallwellen gerade die Bragg-Bedingung, denn eine zurückgestreute Welle (Spiegelung im reziproken Raum an der  $\nu$ -Achse) führt zu einer Differenz der Wellenvektoren vor und nach dem Streuprozess von  $n \frac{2\pi}{a}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , also einem reziproken Gittervektor.

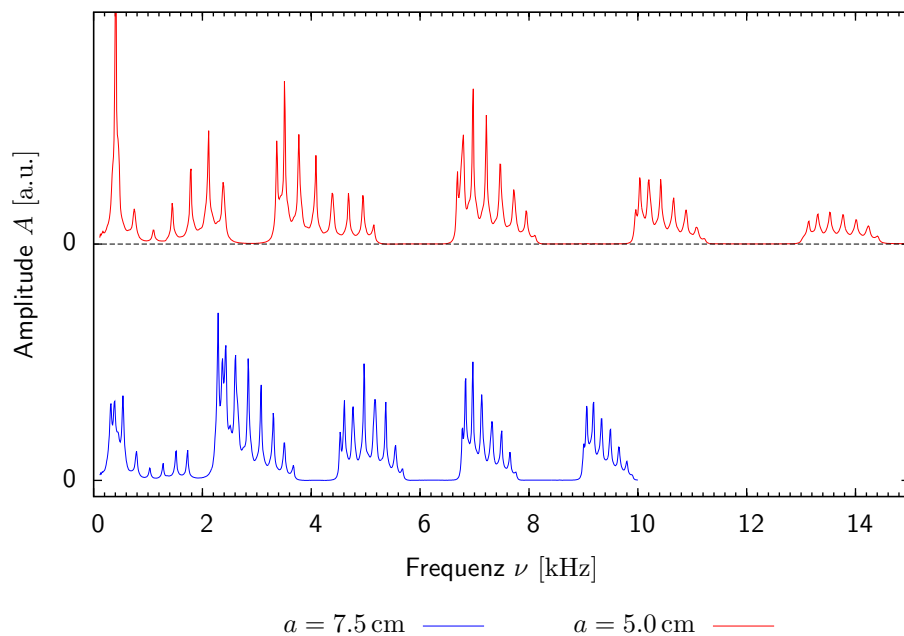


Abbildung 38: Abhängigkeit des Spektrums von der Gitterkonstanten  $a$ .

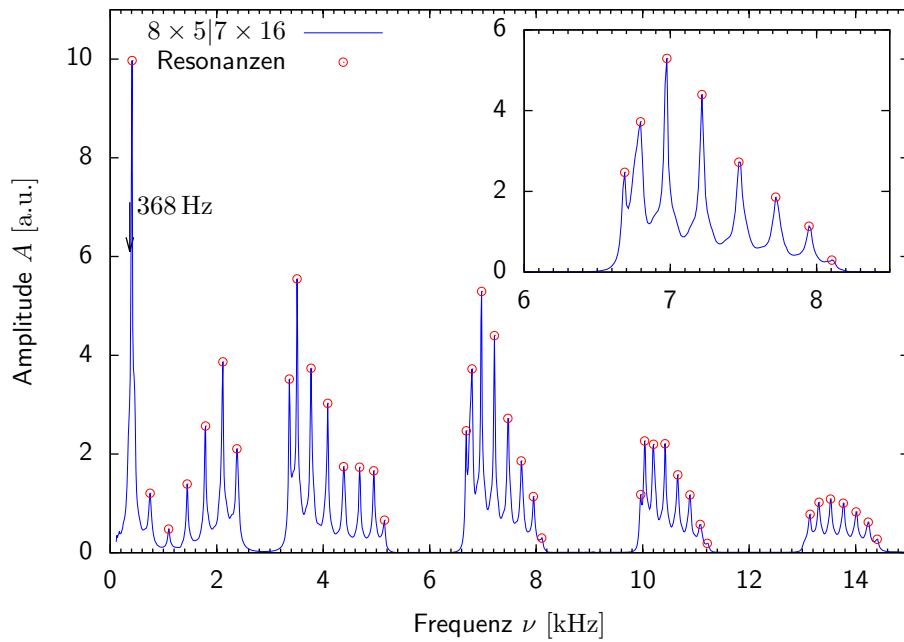


Abbildung 39: Spektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers aus  $8 \times 5$  cm-Röhren mit 16 mm-Iriden.

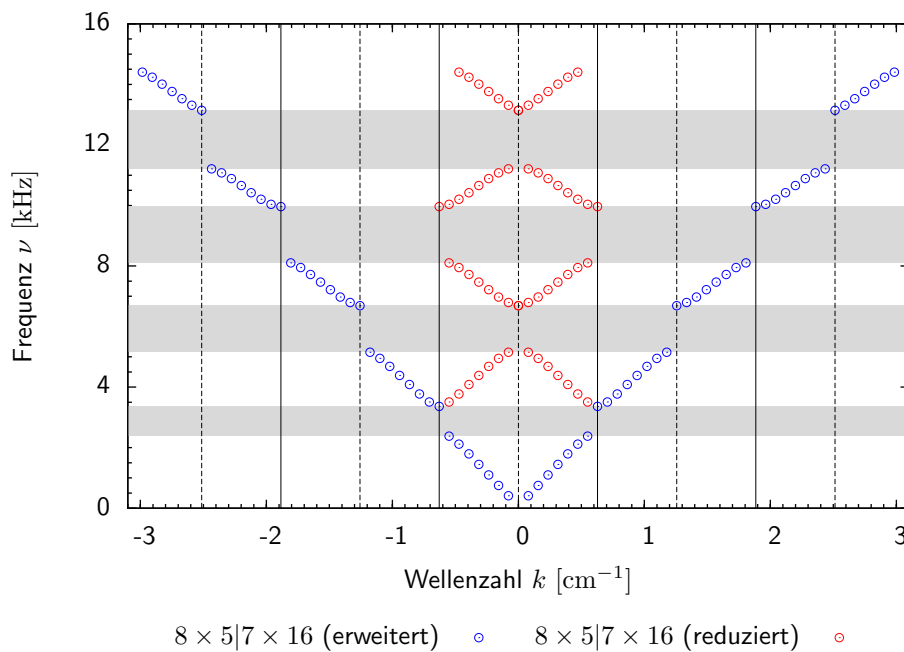


Abbildung 40: Dispersionsrelation mit Gitterkonstante  $a = 5.0$  cm im erweiterten und reduzierten Zonenschema. Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert.

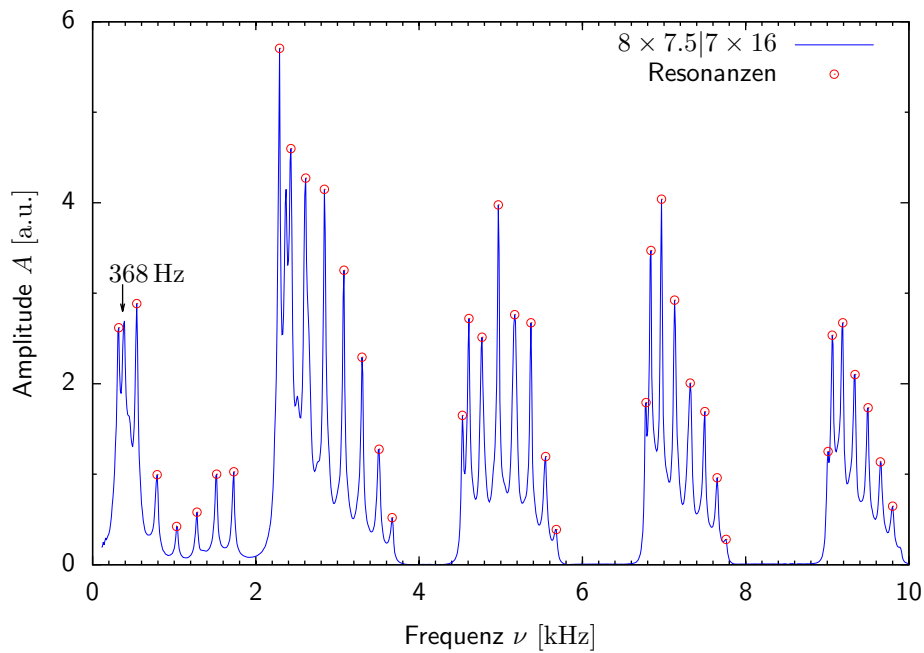


Abbildung 41: Spektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers aus  $8 \times 7.5$  cm-Röhren mit 16 mm-Iriden.

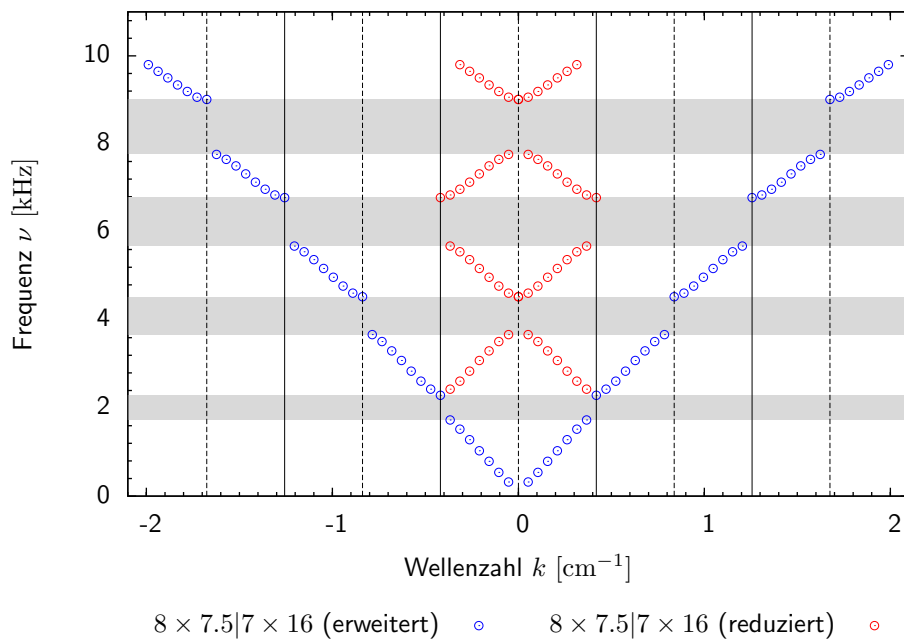


Abbildung 42: Dispersionsrelation mit Gitterkonstante  $a = 7.5$  cm im erweiterten und reduzierten Zonenschema. Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert.

**Abhängigkeit von der Elementarzellenzahl** Um unsere Vermutung zu bestätigen, dass jede Elementarzelle dem Spektrum pro Band einen Zustand hinzufügt, wurden die Spektren von Systemen  $n \times 7.5 \mid (n - 1) \times 16$  mit  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  ausgemessen. Diese Spektren sind in Abb. 43 dargestellt.

Während die ersten beiden Bänder stark gestört sind (speziell die ersten Resonanzen im zweiten Band), zeigen die Bändern 3 – 4 eindrucksvoll, wie sich die Bandstruktur sukzessive beim Hinzufügen von Elementarzellen aufbaut. Dabei kann man die Grafik von oben nach unten lesen. Beginnend mit den Zuständen einer einzelnen (ungestörten) Röhre (i.e. eines einzelnen Atoms) bilden sich im nächsten Schritt (zwei Elementarzellen) Linearkombinationen der Einzelmoden, die jeweils um die Moden des vorherigen, kleineren Systems gruppiert sind. Im Fall zweier Elementarzellen (also eines zweiatomigen Moleküls) sind dies die bindenden und antibindenden Zustände. Weitere Zellen in der Kette führen zu anderen/weiteren Linearkombinationen und die Bänder nehmen Gestalt an. Dies ist eine Illustration der *Tight-Binding Methode*.

Betrachtet man hingegen die Spektren des Systems als Spektren einer Röhre entsprechender Länge (die natürlich mit der Anzahl  $N$  der Elementarzellen variiert), so lassen sich die Bandlücken als Streuphänomen verstehen. In diesem Bild entsteht das Spektrum aus dem einer Röhre entsprechender Länge (wegen  $\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{Na}$  ändert sich der Peak-Abstand mit der Anzahl der Röhren), wobei diejenigen Peaks, die die Bragg-Bedingung erfüllen, unterdrückt werden, da die zugehörigen Wellen auf Grund der Bragg-Streuung nicht mehr propagieren können. Dies ist das Bild des *Elektronengases im periodischen Potential*.

Es ist zu beachten, dass für  $N = 1$  das erste Band noch nicht existent ist. Der Peak nahe beim Ursprung ist auf die schon erwähnte Geräteresonanz zurückzuführen. Erst für zwei Elementarzellen (hellgraue Kurve) bildet sich die erste Resonanz im Band mit Index 1 heraus. Damit versteht man auch, weshalb das erste Band immer  $N - 1$  Peaks aufweist: Die Mode mit  $k = 0$  lässt sich als Schallwelle nicht realisieren, da sie nicht oszillieren kann. Folglich “fehlt” im untersten Band immer gerade ein Zustand.

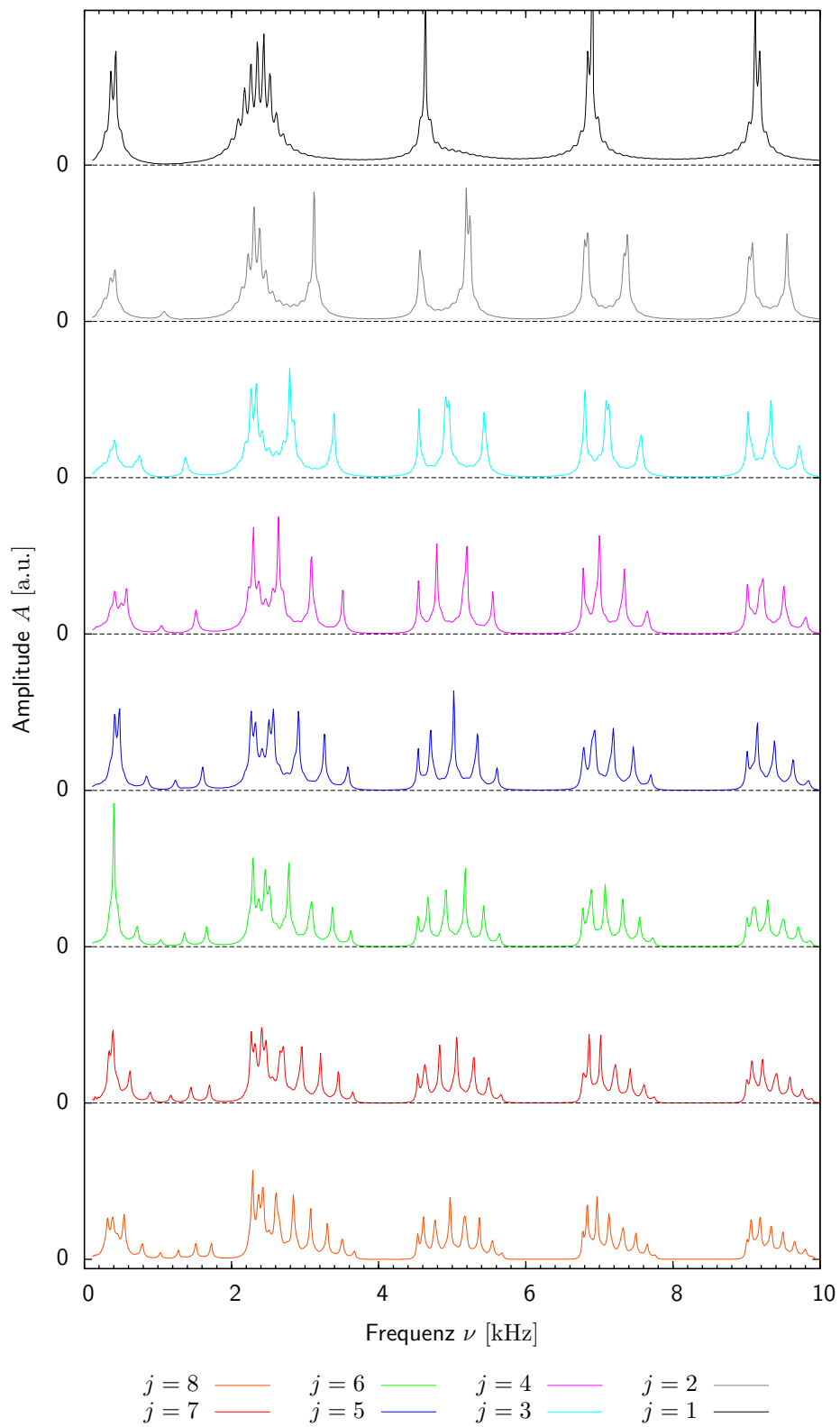


Abbildung 43: Abhängigkeit des Spektrums von der Zahl der Elementarzellen  $j$ .

**Abhängigkeit vom Irisdurchmesser** Um die Abhängigkeit der Dispersion vom Irisdurchmesser  $D$  zu untersuchen wurden die Systeme  $8 \times 7.5 | 7 \times D$  mit  $D \in \{16, 13, 10\}$  ausgemessen. Die Spektren sind in Abb. 44 dargestellt.

Es fällt sofort auf, dass sich weder die Zahl der Zustände, noch die Frequenz des ersten Zustandes in jedem Band ändert. Allerdings verschieben sich die Bandenden mit kleineren Durchmessern hin zu kleineren Frequenzen. Die Bändern werden also "gestaucht" und die Frequenzabstände zwischen den einzelnen Moden nehmen ab.

Um die Auswirkung dieses Effektes auf die Dispersionsrelation beobachten zu können, wurde in Abb. 45 das Spektrum des Systems  $8 \times 7.5 | 7 \times 13$  auf Resonanzen hin untersucht. Die Frequenzen der rot markierten Peaks fließen in die Dispersionsrelation (siehe Abb. 46) ein. Man beachte, dass bei höheren Bändern einige Resonanzen nicht mehr aufgelöst werden können.

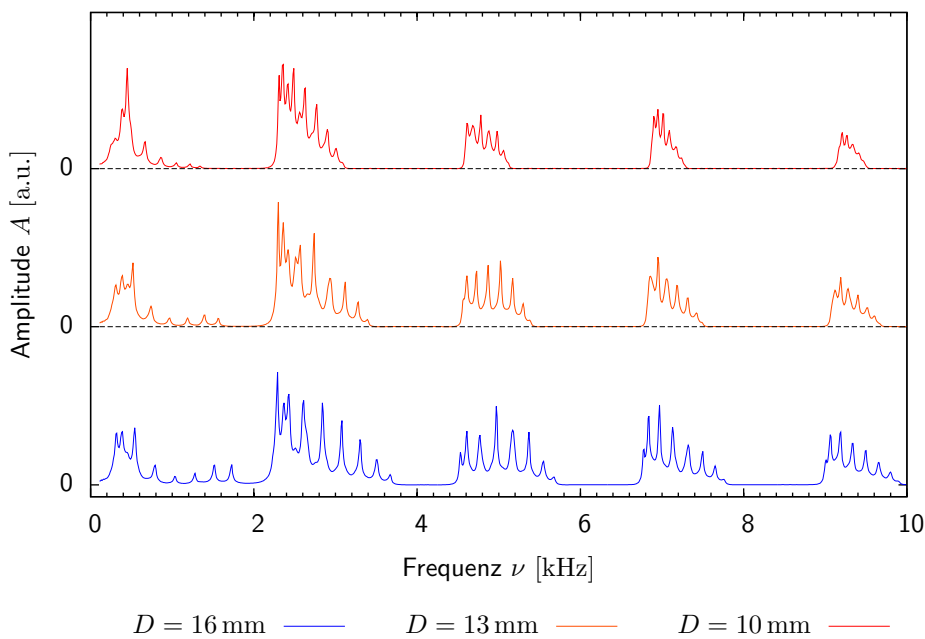


Abbildung 44: Abhängigkeit des Spektrums vom Irisdurchmesser  $D$ .

Die Dispersionsrelation des Systems mit  $D = 13 \text{ mm}$  wird in Abb. 46 mit der schon früher bestimmten Dispersionsrelation mit  $D = 16 \text{ mm}$  verglichen. Die Kompression der Bändern führt zu einer Verringerung der Steigung der einzelnen Dispersionszweige. Da die Frequenz der ersten Resonanz eines Bandes unverändert bleibt, führt dieser Effekt zu einer Vergrößerung der Bandlücke. Diese Vergrößerung ist in Abb. 46 dunkelgrau markiert.

Umgekehrt führt eine Aufweitung der Iriden (wachsendes  $D$ ) zu einer zunehmenden Schmälerung der Bandlücken. Die Steigung der Dispersionsäste nimmt also für  $D \rightarrow D_{max}$  (wobei  $D_{max}$  dem Durchmesser der Röhren entspricht) so lange zu, bis sie für  $D = D_{max}$  zu einer Schließung der Bandlücken führt. Dann ist das System wieder eine ungestörte Röhre der Länge  $L = 600 \text{ mm}$  und die Dispersionrelation entspricht Abb. 37.

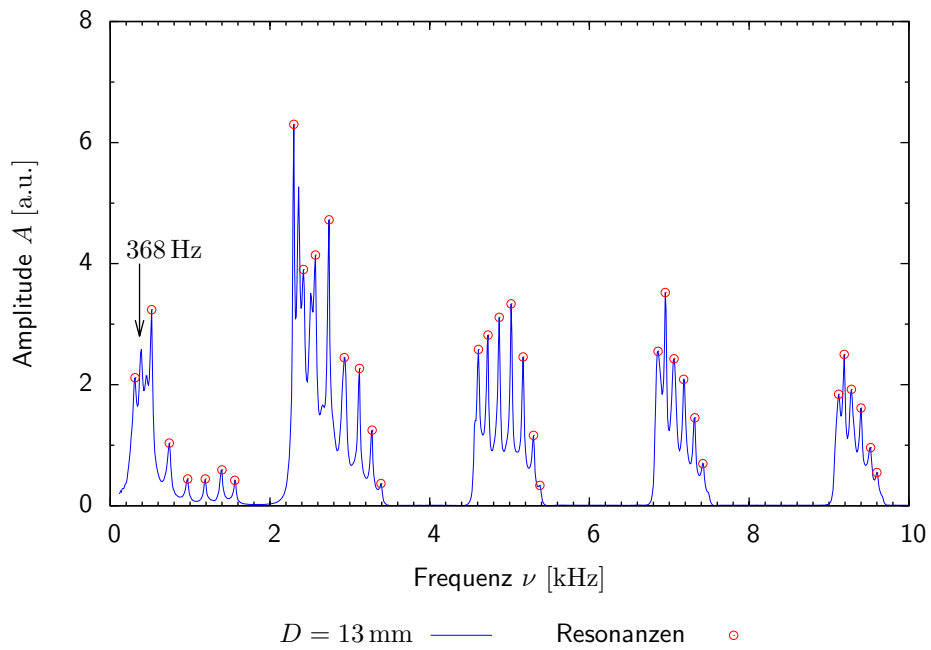


Abbildung 45: Resonanzen im Spektrum mit Irisdurchmessern  $D = 13 \text{ mm}$ .

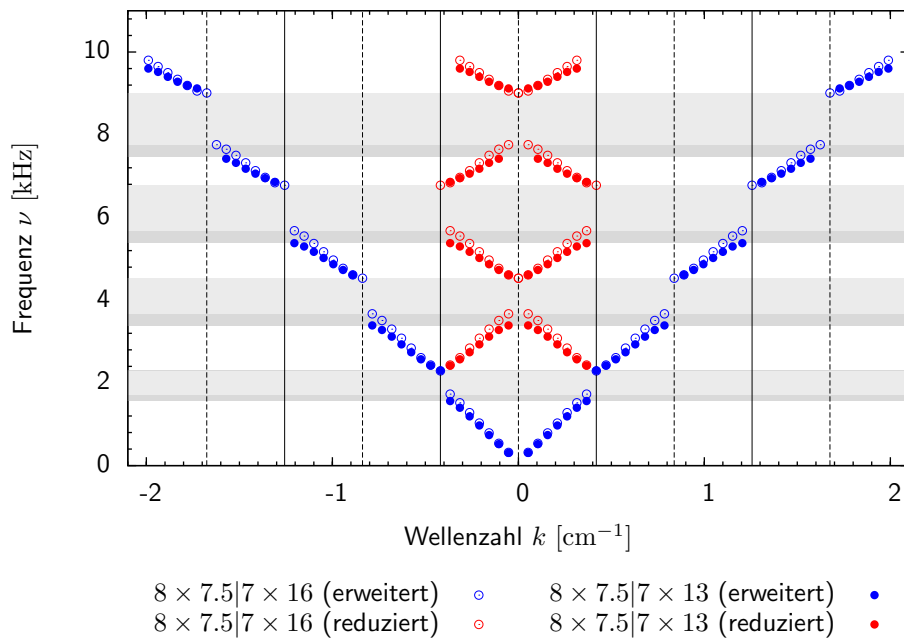


Abbildung 46: Vergleich der Dispersionsrelationen zweier Gitter mit  $a = 7.5 \text{ cm}$  und unterschiedlichen Irisdurchmessern  $D$ . Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. Die dunkelgrauen Bereiche markieren die Verbreiterung der Bandlücken im Vergleich zum Festkörper mit  $D = 16 \text{ mm}$ .

### 2.3.3 Spektrum eines Übergitters

Im Folgenden untersuchen wir ein System mit einem Übergitter. Dieses wird durch die abwechselnde Anordnung von 13 mm und 16 mm Iriden erzeugt. Das untersuchte System bestand aus  $12 \times 5$  cm Röhren mit  $6 \times 13$  mm und  $5 \times 16$  mm Iriden die abwechselnd zwischen den Röhren positioniert wurden. Vernachlässigt man die Dicke der Iriden, ergibt sich eine Gesamtlänge von  $L = 12 \cdot 50 \text{ mm} = 600 \text{ mm}$  des Systems.

Um die durch das Übergitter induzierten Besonderheiten der Dispersionsrelation besser hervorheben zu können, haben wir zusätzlich ein  $12 \times 5 | 11 \times 16$ -System untersucht – also ein vergleichbares System ohne Übergitter. Die Spektren beider Systeme sind in Abb. 47 dargestellt.

Offensichtlich ändert sich die Zahl der Resonanzen pro Band nicht. Allerdings bildet sich beim System mit Übergitter eine kleine Bandlücke innerhalb der Bänder aus. Anders interpretiert: Die Bänder spalten auf. Offensichtlich führt ein Übergitter zu einer Aufspaltung der Bänder, ähnlich wie ein Gitter zur Aufspaltung der Zustände eines Elementarresonantors geführt hat.

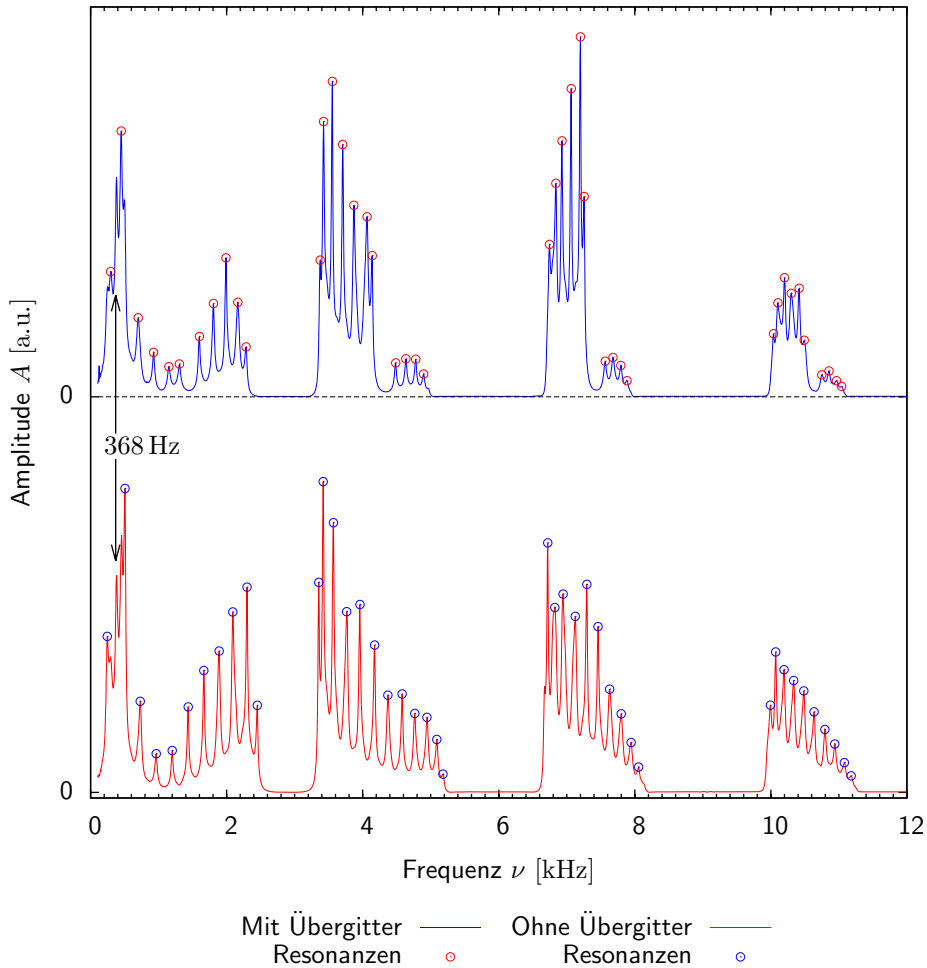


Abbildung 47: Spektrum eines Übergitters im 1-dimensionalen Festkörper im Vergleich zum Festkörper ohne Übergitter.

Die in Abb. 47 markierten Resonanzen wurden verwendet um die in Abb. 48 dargestellten Dispersionsrelationen zu berechnen. Die soeben erläuterte Bandaufspaltung führt in der Dispersionsrelation zu den dunkelgrau hervorgehobenen zusätzlichen Bandlücken. Diese Bandlücken entste-

hen analog zum oben beschriebenen Prozess des ‐Aufklappens‐ der Dispersions‐aste. Diese haben beim System mit ‐bergitter etwas geringere Steigungen als die des ungest‐rten Systems. Diese Steigungsdifferenz in Verbindung mit periodisch wiederkehrenden frequenzfesten Zust‐nden (diese wirken wie ‐Scharniere‐ um die sich die ‐Aste drehen) f‐hrt zum einen zu den neuen Bandl‐cken und zum anderen zu einer Verbreiterung der urspr‐nglichen Bandl‐cken.

Da das ‐bergitter die Periode  $a' = 2a$  aufweist, ist die korrespondierende Brillouin-Zone nur noch halb so breit ( $\frac{\pi}{2a}$  bis zum Rand). Die Frequenzaufspaltung durch die periodische St‐rung ergibt sich auf Grund der Bragg-Bedingung immer am Rand der ersten Brillouin-Zone (und bei allen weiteren R‐ndern und Mitten der Brillouin-Zonen). Dieser Rand liegt in unserem Fall genau in der Mitte der Brillouin-Zone des Gitters. Die Mitten der neuen Brillouin-Zonen fallen gerade mit den R‐ndern und Mitten der Brillouin-Zonen des Gitters zusammen. Da dort schon eine Aufspaltung vorliegt, f‐hrt das ‐bergitter an diesen Stellen im reziproken Raum nur zu einer Aufweitung der vorhandenen Bandl‐cke. Nur die R‐nder der Brillouin-Zonen des ‐bergitters fallen mitten in die beiden H‐lften der urspr‐nglichen Zonen und rufen dort eine neue Bandl‐cke hervor.

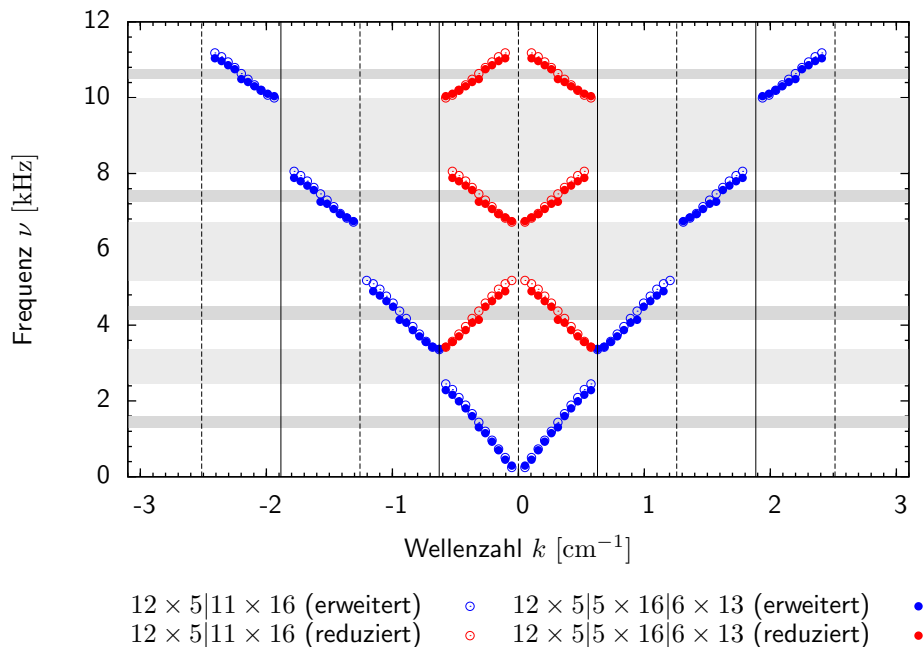


Abbildung 48: Vergleich der Dispersionsrelationen zweier Gitter mit und ohne ‐bergitter. Die R‐nder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. Die dunkelgrauen Bereiche markieren die neuen Bandl‐cken im Vergleich zum Festk‐rper ohne ‐bergitter.

### 2.3.4 Einfluss von Defekten auf die Spektren

Wir betrachten im Folgenden einen aus  $12 \times 5$  cm R‐hren bestehenden Festk‐rper, dessen Elementarzellen durch  $11 \times 16$  mm Iriden getrennt sind. Nun f‐hren wir einen Defekt (also eine nichtperiodische St‐rung) in Form eines einzelnen 7.5 cm langen Resonators (anstelle eines 5 cm langen) ein.

Um die Abh‐ngigkeit des Spektrums von der Position der St‐rung zu untersuchen, werden mehrere Spektren ausgemessen – jeweils mit einer anderen Position der St‐rung. Die Resultate sind in Abb. 49 dargestellt. Wie man anhand der ‐bersichtsspektren im Frequenzbereich von 0 kHz

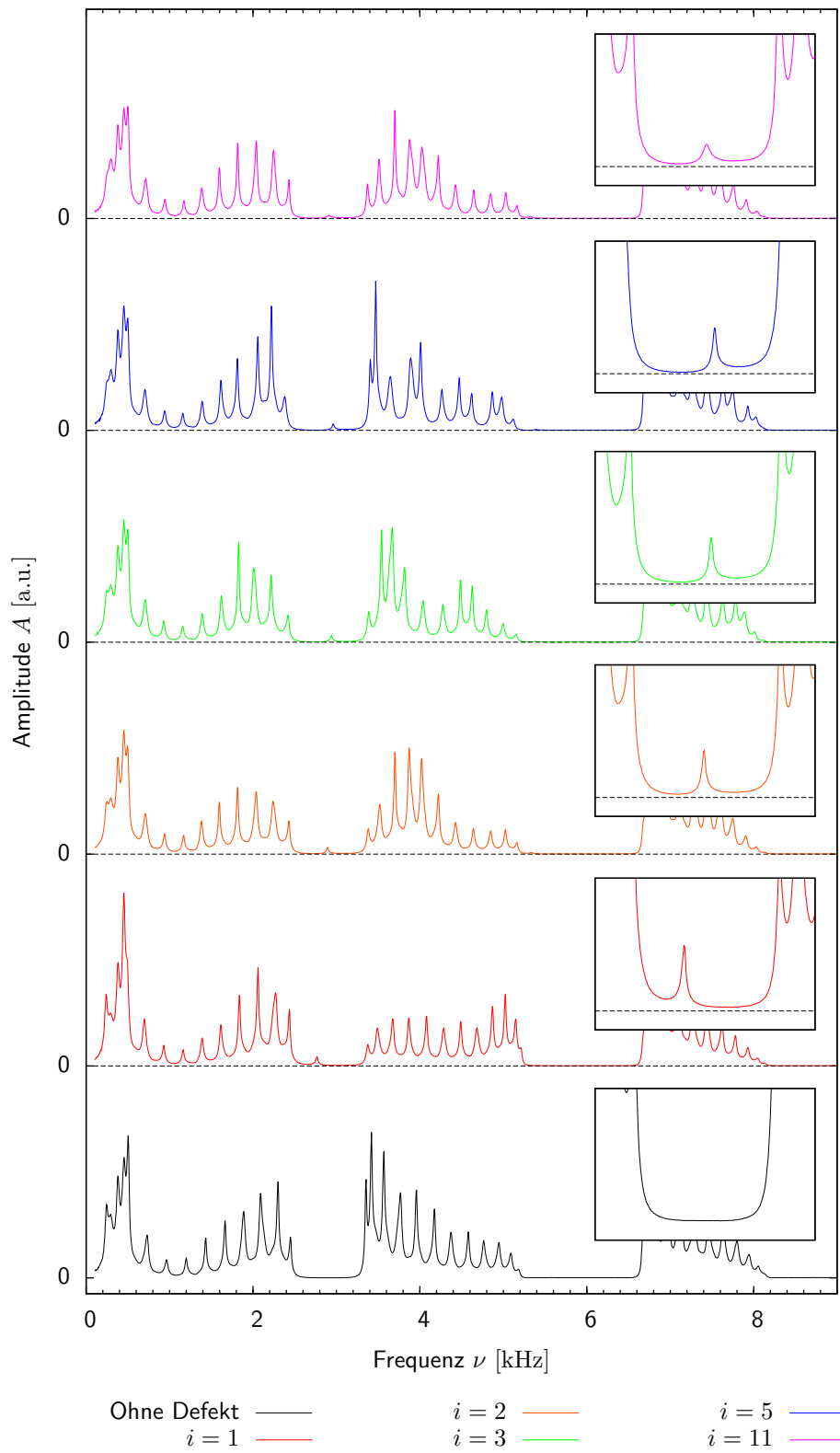


Abbildung 49: Spektrum eines Kristalls mit Defekt an unterschiedlichen Stellen  $i \in \{1, \dots, 12\}$ . Die Ausschnitte der Spektren zeigen jeweils die erste Bandlücke.

bis 9 kHz erkennt, führt der Defekt zu einem neuen Zustand in der ersten Bandlücke während die höheren Bandlücken unverändert bleiben.

In den Ausschnittsplots neben den Übersichtsspektren ist jeweils die erste Bandlücke dargestellt. Man erkennt, dass der Defektzustand links – in der Nähe des ersten Bandes – liegt, wenn der Defekt an Position 1 (also ganz am Rand) gesetzt wird. Schiebt man den Defekt weiter nach innen, verschiebt sich auch die Position der Defektmode weiter nach rechts. Die Verschiebung wird aber zunehmend geringer und erreicht ihr Maximum für eine (nahezu<sup>2</sup>) mittige Störung. Geht man über die Mitte hinaus ( $j = 11$ ) verschiebt sich der Defektzustand wieder nach links. Dies ist aus Symmetriegründen (die schon erwähnte  $C_2$ -Symmetrie) auch zu erwarten. Aus diesem Grund entspricht die Position der  $j = 2$  Störung im Spektrum der der  $j = 11$  Störung.

Das Analogon in der Festkörperphysik ist das Dotieren eines Einkristalls, wie es z.B. in der Halbleiterelektronik üblich ist. Donatoren erzeugen dabei Zustände innerhalb der Bandlücke nahe am Leitungsband während Akzeptoren nahe am Valenzband (also an der Unterkante einer Lücke) neue Zustände einfügen.

---

<sup>2</sup>Bei 12 Elementen existiert keines in der Mitte.

### 3 Fehlerdiskussion

Da die Messungen großteils auf ein und dem selben Messverfahren beruhen, unterliegen sie alle gewissen Einschränkungen, die durch die verwendeten Geräte und Messweisen auferlegt werden:

- Bei den Versuchen war stets darauf zu achten, dass die Messkette Mikrofon–Vorverstärker–Soundkarte im linearen Bereich betrieben wurde, d.h. dass die gemessene Schallamplitude proportional zur gemessenen Spannungsamplitude sein sollte. Ist diese nicht der Fall (sättigt z.B. der Verstärker oder die Soundkarte), werden die Amplitudenhöhen verzerrt. Da diese nicht zu Auswertungszwecken herangezogen wurden, ist dieser Effekt zu vernachlässigen.
- Nicht zu vernachlässigen ist der Effekt von “Schultern” oder Nebenpeaks von eigentlichen Resonanzen, die durch einen zu niedrig eingestellten Wert am Attenuator hervorgerufen werden können. Im Extremfall führen diese zu Scheinresonanzen und damit zu handfesten Messfehlern.
- Die vorliegende Kombination von Mikrofon und Lautsprecher bei den Experimenten mit Röhrenresonatoren führte zu einer Geräteresonanz bei 368 Hz, die bei der Analyse der Messwerte ignoriert werden muss. Z.T. überdeckt diese Resonanz eigentliche Resonanzen und erschwert damit die Zählung letzterer.
- Die Schallgeschwindigkeit hängt von der Temperatur des Füllgases der Resonatoren ab. Diese hat wiederum direkten Einfluss auf die Lage der Resonanzen. Durch Erwärmen der Luft im Labor und der Aluminiumresonatoren auf Grund der Handhabung durch die Experimentatoren ergibt sich ein leichter Frequenzshift der Resonanzen über die Zeit hinweg. Daher müssen *vergleichbare* Spektren möglichst schnell hintereinander aufgenommen werden. Da dies den Frequenzshift nicht vollständig verhindert müssen *immer* kleine Frequenzschwankungen zwischen unterschiedlichen Messungen in Kauf genommen werden.
- Wird ein Spektrum aufgenommen, so geschieht dies immer mit einer gewissen Frequenzauflösung  $\Delta\nu$ . Bei Übersichtsspektren ist diese i.d.R. auf  $\Delta\nu = 10$  Hz, bei Detailspektren auf  $\Delta\nu \leq 5$  Hz eingestellt. Peaks in diesen Spektren lassen sich damit höchstens auf  $\pm \frac{\Delta\nu}{2}$  genau verorten.

**Röhrenresonatoren als Modell des 1D Kastenpotentials** Es folgen einige Fehlerbetrachtungen der im ersten Versuchsteil berechneten Größen:

- Um eine Abschätzung des Fehlers der berechneten Schallgeschwindigkeit zu erhalten gehen wir von folgenden in die Bestimmung einfließenden Unsicherheiten aus:  $\Delta L = 5$  mm (Herstellungstoleranzen der Röhren, Position von Mikrofon und Lautsprecher in den Endkappen),  $\Delta\nu = 10$  Hz (Frequenzauflösung des Spektrums & Frequenzdrift durch Temperaturerhöhung im Laufe der Messung). Da die Messwerte in Abb. 13 nahezu exakt auf einer Geraden liegen, wird die Steigungstoleranz  $\Delta m$  durch die Fehlerbalken des ersten und letzten Messpunktes bestimmt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_{max} - m_{min} = \frac{\nu_{max} + \Delta\nu - (\nu_{min} - \Delta\nu)}{n_{max} - n_{min}} - \frac{\nu_{max} - \Delta\nu - (\nu_{min} + \Delta\nu)}{n_{max} - n_{min}} \\ &= 4 \frac{\Delta\nu}{n_{max} - n_{min}} = 4 \frac{10 \text{ Hz}}{31} \approx 1.29 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Mit  $n_{max} = 34$  und  $n_{min} = 3$  (siehe Abb. 13). Damit ergibt sich ein absoluter Fehler mittels Fehlerfortpflanzung ( $m = \frac{c}{2L} \Leftrightarrow c = 2Lm$ ,  $m = \frac{\nu_{max} - \nu_{min}}{n_{max} - n_{min}} \approx 287.4$  Hz)

$$\Delta c = 2m\Delta L + 2L\Delta m = 2 \cdot 287.4 \text{ Hz} \cdot 0.005 \text{ m} + 2 \cdot 0.6 \text{ m} \cdot 1.29 \text{ Hz} \approx 4.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dies ergibt den relativen Fehler  $\delta c = \frac{\Delta c}{c} = \frac{4.4}{346.4} \approx 1.3\%$ .

- Eine quantitative Abschätzung des Fehlers der Güten der einzelnen Resonanzen ist nicht möglich, da die verwendete Software keine Informationen über die Qualität des erstellten Fits und die damit verbundenen Fehler der ausgegebenen Fitparameter liefert.

Allerdings fallen zwei Dinge auf:

Zum einen schwanken die Güten für die unterschiedlichen Resonanzen relativ stark und ohne erkennbares Muster. Es ist a priori auch nicht klar, ob überhaupt konstante Werte für unterschiedliche Resonanzen zu erwarten wären oder ob Nebeneffekte zu einer systematischen Drift der Güte führen können. Daher ist der Mittelwert  $\bar{G}$  der Güten nur als grobe Schätzung der Qualität des Resonators zu sehen.

Zum anderen hängt das FWHM offensichtlich von der Amplitude der Resonanz ab. Da diese bei höheren Resonanzen niedriger ausfallen ergeben sich näherungsweise konstante Güten. Es stellt sich also die Frage, ob und wenn ja, wie sich die Güte bei anderen Schallintensitäten verändert hätte.

**Sphärischen Resonator als Modell des Wasserstoffatoms** Die in diesem Versuchsteil durchgeführten Messungen waren qualitativer bzw. diskreter Natur. Wir diskutieren daher im Folgenden mögliche Fehlerquellen, die zu Abweichungen der Messungen von den theoretisch erwarteten Ergebnissen führen:

- Im ungestörten Problem wird unter der Annahme gearbeitet, dass auf Grund der Symmetrie nur  $m = 0$ -Moden angeregt werden (daher werden z.B. auch Legendre- und keine *zugeordneten* Legendre-Polynome für die Fits verwendet). Da die Schallkeule des Lautsprechers mit Sicherheit nicht exakt rotationssymmetrisch ist und auch die Cavity durch Löcher, Nuten und den Herstellungsprozess selbst leichte Abweichungen vom idealen sphärischen Resonator aufweist, können auch  $m \neq 0$ -Resonanzen (schwach) angeregt werden und die beobachteten  $m = 0$ -Moden deformieren.
- Das Mikrofon hat eine gewisse Ausdehnung. Daher misst es immer die Mittelung der Amplitude über einen gewissen (kleinen) Raumwinkelbereich. Dies führt zu Beschränkungen der Winkelauflösung der Messung. Diese wird zudem durch die  $1^\circ$ -Skala begrenzt.
- Wie in den Grundlagen behandelt, weisen die Resonanzen eine endliche Breite im Frequenzraum auf. Daher haben die Peaks immer eine gewisse Breite die nach unten hin zunimmt. Liegen Resonanzen unterschiedlicher  $l$ -Quantenzahl nahe beieinander, werden auch benachbarte Moden angeregt und führen zu Überlagerung beider Moden. Dies erschwert die Zuordnung einiger Polarplots zu den entsprechenden  $l$ -Quantenzahlen.
- Die gemessene Abhängigkeit der Frequenzaufspaltung von der Störung  $\delta$  beruht auf nur 4 Messpunkten. Die postulierte Linearität ist also statistisch keinesfalls belegt, sondern nur als eine relativ gute Approximation der gemessenen Werte anzusehen.

**Lineare Resonatorketten als Festkörpermodell** Auch die in diesem Versuchsteil durchgeführten Messungen waren qualitativer bzw. diskreter Natur. Die folgenden möglichen Fehlerquellen können zu Abweichungen der Messungen von den theoretisch erwarteten Ergebnissen führen:

- Generell wird die vertikale Genauigkeit der berechneten Dispersionsrelationen (also die Frequenz der einzelnen Zustände) durch die Frequenzauflösung des verwendeten Spektrogramms bestimmt.
- Durch die Abschwächung der Resonanzen in höheren Bändern können die ersten und letzten Peaks eines Bandes oft nur schwer oder garnicht identifiziert werden. In diesen Fällen müssen die Indices der folgenden Resonanzen passend gewählt werden (die nicht sichtbaren Peaks müsse mitgezählt werden). Wird dies vergessen, ist eine Verzerrung der gesamten Dispersionsrelation die Folge.

- Störungen im Spektrum erschweren die Identifikation der eigentlichen Resonanzen. Dies ist vor allem in den ersten beiden Bändern der Fall. Hier hilft oft nur eine Extrapolation der eindeutig identifizierbaren Resonanzen unter Annahme nahezu äquidistanter Peaks um die passende Resonanz zu markieren.
- Zur Berechnung der Wellenzahlen  $k$  wird die Länge  $L$  des Resonators benutzt. Diese wurde immer nach der Formel  $L = Na$  aus der Länge der Elementarresonatoren bestimmt. Da die Iriden selbst aber auch eine gewisse Dicke haben begeht man hierbei einen Fehler. Allerdings ist a priori nicht klar wie sich die Iriden auf die Gesamtlänge des Resonators auswirken, da sie auf Grund ihres geringeren Durchmessers nicht einfach als zusätzliche Elemente der Röhre betrachtet werden dürfen.

## 4 Zusammenfassung

**Röhrenresonatoren als Modell des 1D Kastenpotentials** Wie von der Theorie vorhergesagt ergaben sich für eine leere 600 mm Röhre äquidistante Resonanzen mit deren Hilfe die Schallgeschwindigkeit der Raumluft zu

$$c(25^\circ) = (246 \pm 5) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bestimmt werden konnte. Der Vergleich mit dem Literaturwert für  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $c^* = 346 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , liefert eine gute Übereinstimmung zwischen unserer Messung und dem Literaturwert. Da die Temperatur im Resonator nicht bestimmt wurde, ist die scheinbar exakte Übereinstimmung der beiden Werte als Zufall zu werten.

Das Hochaufgelöste Spektrum der 150 mm Röhre zeigte die auf Grund des Modells eines gedämpften harmonischen Oszillators erwarteten Linienverbreiterungen. Die Korrektheit des Modells im Rahmen physikalischer Betrachtungen konnte anhand eines Fits der theoretisch vorhergesagten Kurvenform an die Messwerte bestätigt werden. Mit den Fitparametern der 8 untersuchten Resonanzen wurde die (mittlere) Güte des Röhrenresonators zu

$$\bar{G} \approx 240$$

abgeschätzt.

Die Untersuchung der Reproduzierbarkeit der Spektren ergab einen systematischen Shift der Resonanzen hin zu größeren Frequenzen. Dies lässt sich durch die Erwärmung der Raumluft im Resonator auf Grund der steigenden Temperatur im Labor und der ständigen Berührung der Cavity durch die Experimentatoren erklären.

**Sphärischen Resonator als Modell des Wasserstoffatoms** Die Spektren des sphärischen Resonators zeigten eine starke Winkelabhängigkeit. Das Ausmessen der Amplituden in Abhängigkeit vom Winkel für drei ausgewählte Resonanzen lieferte in zwei Fällen gute Übereinstimmung mit den Legendre-Polynomen  $P_{5,0}$  und  $P_{7,0}$ . Im dritten Fall wurde das Legendre-Polynom  $P_{4,0}$  als wahrscheinlichste Möglichkeit angenommen.

Die anschließende Untersuchung aller Resonanzen für  $\nu \leq 10 \text{ kHz}$  mit Hilfe der polar aufgetragenen Amplitude lieferte die  $l$ -Quantenzahlen der Resonanzen. Hierbei bestätigten sich die mit der manuellen Messung bestimmten  $l$ -Quantenzahlen. Insgesamt konnten alle Resonanzen bis zu  $l = 7$  für  $n = 1$ ,  $l = 3$  für  $n = 2$  und die Resonanz  $l = 0$  für  $n = 3$  im Spektrum identifiziert werden. Bei einigen Resonanzen wurden keine Einzelmoden beobachtet, sodass die Vermutung nahe liegt, dass auch  $m \neq 0$ -Moden (trotz Symmetrie) schwach angeregt werden und die beobachteten Amplituden deformieren.

Die  $m$ -Entartung wurde im durch Abstandsringe gestörten Resonator aufgehoben. Hierbei ergab sich ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen Frequenzaufspaltung  $\delta\nu$  und Ringdicke  $\delta$  für die p-Welle. Auf Grund der beobachteten Aufspaltung ließ sich die theoretische Vorhersage einer verbleibenden  $\pm m$ -Entartung bestätigen, da für die  $l = 1$  Resonanz nur 2 Zustände beobachtet wurden.

**Lineare Resonatorketten als Festkörpermodell** Die Dispersionsrelation einer leeren 600 mm Röhre entsprach der diskretisierten Version einer Schallwelle im freien Raum. Durch Einfügen periodischer Streuzentren (realisiert durch Iriden) konnte die in der Festkörperphysik bekannte Bildung einer Bandstruktur beobachtet werden. Hierbei stellte sich heraus, dass die Breite der Brillouin-Zonen von der Länge der Elementarresonatoren  $a$  (i.e. der Gitterkonstante) abhängt. Die Elementarzellenzahl  $N$  bestimmt die Anzahl der Moden in jedem Band ( $N - 1$  Moden im ersten und  $N$  Moden in allen weiteren Bändern). Der Irisdurchmesser als Maß für die Kopplungsstärke zwischen den Elementarresonatoren bzw. als Maß für den Streuquerschnitt der Streuzentren hat Einfluss auf die Steigung der einzelnen Äste in der Dispersionsrelation und damit die Breite der Bandlücken.

Das Einfügen einer Übergitterstruktur (also periodische Störungen) führte zur Aufspaltung der Bänder auf Grund neuer, schmälerer Brillouin-Zonen im reziproken Raum. Es bildeten sich neue, schmale Bandlücken in der Mitte der Bänder des ungestörten Festkörpers.

Die Untersuchung einzelner (nicht-periodischer) Defekte im ansonsten periodischen Festkörper ließ einzelne Moden in der ersten Bandlücke entstehen. Die Position der Störung hatte Einfluss auf die Lage der Mode im Frequenzraum. Dieses Modell veranschaulicht die Bildung von Zuständen in dotierten Halbleitern.

## Abbildungsverzeichnis

1	Die Potentiallandschaft des Kastenpotentials (links) und die ersten drei (reellwertigen) Wellenfunktionen (rechts) (Quelle: [8]). . . . .	4
2	Querschnitt der Elektronendichteverteilung (Quelle: [9]). . . . .	5
3	Gerade und Ungerade Wellenfunktionen des Wasserstoffmoleküls (links) als Linearkombination zweier Atomorbitale sowie Abhängigkeit der Bindungsenergie $\Delta E$ vom Kernabstand $R_{ab}$ (Quelle: [2]). . . . .	6
4	H <sub>2</sub> -Molekül (Quelle: [2]). . . . .	7
5	Konstruktion einer Wigner-Seitz-Zelle (Quelle: [3]). . . . .	9
6	1D-Gitter mit Gitterkonstanten $a$ (oben) und reziproker Raum (unten). Die erste Brillouin-Zone ist farblich hervorgehoben (Quelle: [3]). . . . .	10
7	Schematische Darstellung der Streuung am Kristall (Quelle: [3]). . . . .	11
8	Vollständiges Zonenschema (unten) und reduziertes Zonenschema (oben). Hier für willkürlich gewählte, periodische Dispersionszweige. (Quelle: [3]). . . . .	12
9	Schematische Darstellung der Schwingungsamplituden $\xi$ und des Druckverlaufes $P$ eines linear eingeschlossenen Gases (Quelle: [1]). . . . .	14
10	Ungestörtes Problem (links) und gestörtes Problem (rechts) mit der neu induzierten, senkrechten Symmetrieachse (Quelle: [4]). . . . .	16
11	Resonanzverbreiterung im klassischen Fall (grün) und für ein quantenmechanisches System endlicher Lebensdauer (rot) (Quelle: [4]). . . . .	18
12	Spektrum der 600 mm-Röhre. . . . .	20
13	Resonanzfrequenzen der 600 mm-Röhre über der Indexnummer $n$ . . . . .	20
14	Übersichtsspektrum der 150 mm-Röhre. . . . .	21
15	Hochaufgelöstes Spektrum der 150 mm-Röhre mit Fit basierend auf der Summe einer Lorentzkurve für jede Resonanz. . . . .	22
16	Ausschnitt der hochaufgelösten Spektren der 150 mm-Röhre in Zeitabständen von $\sim 5$ min, also $t_1 < t_2 < t_3$ . . . . .	23
17	Übersichtsspektren des sphärischen Resonators für die Winkel $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 139^\circ, 180^\circ$ . Im Ausschnitt um 11.5 kHz herum erkennt man deutlich, dass die Amplitude vom Winkel abhängt. . . . .	26
18	Winkelabhängigkeit der Resonanzen bei 7.4 kHz und 9.8 kHz. Die Fits mit durchgezogenen Linien haben als einzigen freien Parameter die Amplitude, während die gestrichelten Kurven einen Winkeloffset als zusätzlichen Fitparameter benutzen. . . . .	26
19	Winkelabhängigkeit der Resonanz bei 6.2 kHz. Der Fit mit durchgezogener Linie hat als einzigen freien Parameter die Amplitude, während die gestrichelte Kurven einen Winkeloffset als zusätzlichen Fitparameter benutzt. . . . .	27
20	Übersichtsspektrum des sphärischen Resonators für den Winkel $\alpha = 180^\circ$ . Die mit Hilfe der Legendre-Polynome bestimmten $l$ -Quantenzahlen sind in eckigen Klammern eingetragen. . . . .	28
21	$l = [0]$ bei $\nu = 453$ Hz . . . . .	30
22	$l = [1]$ bei $\nu = 2324$ Hz . . . . .	30
23	$l = [2]$ bei $\nu = 3727$ Hz . . . . .	30
24	$l = [3]$ bei $\nu = 5036$ Hz . . . . .	30
25	$l = [4]$ bei $\nu = 6268$ Hz . . . . .	30
26	$l = [5]$ bei $\nu = 7484$ Hz . . . . .	30
27	$l = [6]$ bei $\nu = 8684$ Hz . . . . .	30
28	$l = [7]$ bei $\nu = 9853$ Hz . . . . .	30
29	$l = (1)$ bei $\nu = 6611$ Hz . . . . .	31
30	$l = (2)$ bei $\nu = 8107$ Hz . . . . .	31
31	$l = \{0\}$ bei $\nu = 8589$ Hz . . . . .	31
32	$l = (3)$ bei $\nu = 9526$ Hz . . . . .	31

33	Übersichtsspektrum des sphärischen Resonators für den Winkel $\alpha = 180^\circ$ . Die mit Hilfe der obigen Vergleiche bestimmten $l$ -Quantenzahlen sind in eckigen Klammern eingetragen. . . . .	32
34	Übersichtsspektren des sphärischen Resonators für den Winkel $\alpha = 180^\circ$ bei zunehmender Störung $\delta$ der sphärischen Symmetrie. . . . .	32
35	Detailspektren des sphärischen Resonators für den Winkel $\alpha = 180^\circ$ bei zunehmender Störung $\delta$ der sphärischen Symmetrie. Dargestellt ist die $l = 1$ Resonanz. . . .	33
36	Abhängigkeit der Aufspaltung $\delta\nu$ der $l = 1$ Resonanz von der Störung $\delta$ . . . . .	34
37	Resonanzfrequenzen der 600 mm-Röhre über der Wellenzahl $k$ . . . . .	36
38	Abhängigkeit des Spektrums von der Gitterkonstanten $a$ . . . . .	37
39	Spektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers aus $8 \times 5$ cm-Röhren mit 16 mm-Iriden.	38
40	Dispersionsrelation mit Gitterkonstante $a = 5.0$ cm im erweiterten und reduzierten Zonenschema. Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. . . . .	38
41	Spektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers aus $8 \times 7.5$ cm-Röhren mit 16 mm-Iriden.	39
42	Dispersionsrelation mit Gitterkonstante $a = 7.5$ cm im erweiterten und reduzierten Zonenschema. Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. . . . .	39
43	Abhängigkeit des Spektrums von der Zahl der Elementarzellen $j$ . . . . .	41
44	Abhängigkeit des Spektrums vom Irisdurchmesser $D$ . . . . .	42
45	Resonanzen im Spektrum mit Irisdurchmessern $D = 13$ mm. . . . .	43
46	Vergleich der Dispersionsrelationen zweier Gitter mit $a = 7.5$ cm und unterschiedlichen Irisdurchmessern $D$ . Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. Die dunkelgrauen Bereiche markieren die Verbreiterung der Bandlücken im Vergleich zum Festkörper mit $D = 16$ mm. . . . .	43
47	Spektrum eines Übergitters im 1-dimensionalen Festkörper im Vergleich zum Festkörper ohne Übergitter. . . . .	44
48	Vergleich der Dispersionsrelationen zweier Gitter mit und ohne Übergitter. Die Ränder der Brillouin-Zonen sind mit durchgezogenen Linien markiert. Die dunkelgrauen Bereiche markieren die neuen Bandlücken im Vergleich zum Festkörper ohne Übergitter. . . . .	45
49	Spektrum eines Kristalls mit Defekt an unterschiedlichen Stellen $i \in \{1, \dots, 12\}$ . Die Ausschnitte der Spektren zeigen jeweils die erste Bandlücke. . . . .	46

## Literatur

- [1] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. 5., neu bearb. u. aktual. Aufl. Springer, Berlin, 2008. – ISBN 9783540792949
- [2] HAKEN, Hermann ; WOLF, Hans C.: *Atom- und Quantenphysik: Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen (Springer-Lehrbuch)*. 8., aktualis. u. erw. A. Springer, Berlin, 2004. – ISBN 9783540026211
- [3] KITTEL, Charles: *Einführung in die Festkörperphysik*. überarbeitete und erweiterte Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2005. – ISBN 9783486577235
- [4] MATZDORF, Rene: *Quantum Analogs - Acoustic Experiments Modeling Quantum Phenomena*. Rev 2.0, 2009
- [5] RUSSELL, Daniel A.: Basketballs as spherical acoustic cavities. In: *American Journal of Physics* 78 (2010), Nr. 6, 549–554. <http://dx.doi.org/10.1119/1.3290176>. – DOI 10.1119/1.3290176
- [6] WIKIPEDIA: *Acoustic wave equation*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic\\_wave\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_wave_equation). Version: 2011. – [Online; accessed 27-June-2011]
- [7] WIKIPEDIA: *Schallgeschwindigkeit*. <https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Schallgeschwindigkeit>. Version: 2011. – [Online; Stand 9. Juli 2011]
- [8] WIKIPEDIA: *Teilchen im Kasten*. [https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Teilchen\\_im\\_Kasten](https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Teilchen_im_Kasten). Version: 2011. – [Online; Stand 26. Juni 2011]
- [9] WIKIPEDIA: *Wasserstoffatom*. <https://secure.wikimedia.org/wikipedia/de/wiki/Wasserstoffatom>. Version: 2011. – [Online; Stand 26. Juni 2011]