

Physikalisches Fortgeschrittenenpraktikum im WS 2011/12

UNIVERSITÄT STUTTGART

Protokoll zum Versuch

V25: Gleichstrom-Josephson-Effekt

Andreas Dietz, Nicolai Lang

25. Dezember 2011

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit dem DC-Josephson-Effekt. Wir bestimmen den Stewart-McCumber-Parameter und die maximale Josephson-Stromdichte des untersuchten Niob-Tunnelkontaktes sowie die London'sche Eindringtiefe von Niob. Weiterhin wird die Abhängigkeit des maximalen Josephson-Gleichstromes von Temperatur und Magnetfeld experimentell bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
1.1 Supraleitung	3
1.1.1 Charakterisierende Effekte	3
1.1.2 Die London-Theorie	5
1.1.3 Die Ginsburg-Landau-Theorie	7
1.1.4 Die BCS-Theorie	8
1.2 Tunnelprozesse und Josephson-Effekte	10
1.2.1 Tunnelprozesse	10
1.2.2 Die Josephson-Gleichungen	12
1.2.3 Das RCSJ-Modell	15
1.2.4 Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit des Josephson-Stromes	17
1.3 Experimentelle Grundlagen	19
1.3.1 Kryotechnik	19
1.3.2 Vakuumerzeugung mit Drehschieberpumpen	20
1.3.3 Magnetfelderzeugung mit Helmholtz-Spulen	21
2 Auswertung	22
2.1 I-U-Charakteristik des DC-Josephson-Effekts	22
2.1.1 Hysterese & Shuntwiderstand	23
2.1.2 Maximaler Josephson-Strom	23
2.1.3 Bandlücke	27
2.1.4 Stewart-McCumber-Parameter	28
2.2 Temperaturabhängigkeit	31
2.2.1 Maximaler Josephson-Strom	31
2.2.2 Energielücke	34
2.3 Magnetfeldabhängigkeit	37
2.3.1 Diskussion und Vergleich mit der Theorie	37
2.3.2 London'sche Eindringtiefe und Josephson-Eindringtiefe	39
3 Fehlerdiskussion	45
4 Zusammenfassung	46
Abbildungsverzeichnis	47
Literatur	51

1 Grundlagen

1.1 Supraleitung

Im folgenden Abschnitt wird der quantenmechanische Effekt der Supraleitung charakterisiert. Wir diskutieren zunächst zwei phänomenologische Theorien und leiten wichtige quantitative Charakteristika der supraleitenden Phase aus deren Annahmen ab. Zuletzt beschreiben wir die heute anerkannte mikroskopische Erklärung der Supraleitung und erläutern die resultierende Bandstruktur.

1.1.1 Charakterisierende Effekte

Supraleitung beschreibt einen elektronischen Zustand von Festkörpern bei extrem niedrigen Temperaturen, der alle Eigenschaften einer thermodynamischen Phase aufweist und zugleich als makroskopisches Quantenphänomen gedeutet werden muss. Die supraleitende Phase eines Festkörpers zeichnet sich durch eine Reihe erstaunlicher physikalischer Eigenschaften aus.

Leitfähigkeit Die wohl bekannteste Eigenschaft von Supraleitern ist der verschwindende elektrische Widerstand ab einer kritischen Temperatur T_C , *Sprungtemperatur* genannt. Dieses Phänomen wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes beim Kühlen von Quecksilber mit flüssigem Helium entdeckt. In Abb. 1 (links) ist die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands von Hg dargestellt (Originalmesswerte von H. K. Onnes). Man erkennt im rechten Bereich des Plots die klassische, näherungsweise lineare Abhängigkeit $R \propto T$ und bei der kritischen Temperatur von $T_C \approx 4.2\text{ K}$ einen Sprung auf $R = 0$.

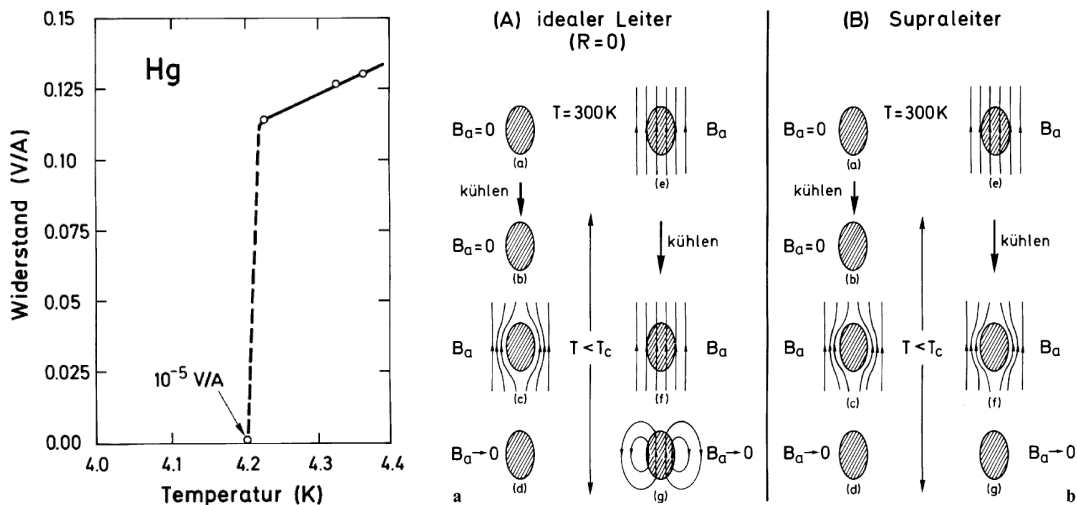


ABBILDUNG 1 : **Links:** Widerstand von Quecksilber nahe der Sprungtemperatur (Originalmesskurve von H. K. Onnes), aus [1]. **Rechts:** Unterschied zwischen idealem Leiter und idealem Diamagnet, aus [1]. Während ein idealer Leiter Magnetfelder auf Grund dynamischer Prozesse aus seinem Inneren verdrängt, geschieht dies bei einem idealen Diamagneten aus seinem *Zustand* selbst heraus, also statisch. Dieses Verhalten qualifiziert Supraleitung als thermodynamische Phase.

Im Rahmen der Messgenauigkeit wurde das vollständige Verschwinden des Widerstandes auch von moderneren Experimenten bestätigt. Hierfür wurden in supraleitenden Ringen Wirbelströme induziert und deren zeitliche Entwicklung beobachtet. Ein Abklingen des Stromes konnte auch bei langen Messzeiten nicht nachgewiesen werden.

Die mutmaßlich unendliche Leitfähigkeit supraleitender Stoffe wird heute z.B. zur Magnetfelderzeugung eingesetzt (supraleitende Spulen). Auch der verlustfreie Stromtransport mittels supraleitender Stromleitungen wird diskutiert.

Meißner-Ochsenfeld-Effekt Weitaus beeindruckender als der verschwindende Widerstand lässt sich der ideale Diamagnetismus eines Supraleiters demonstrieren. Ein Supraleiter besitzt eine magnetische Suszeptibilität $\chi = -1$ und damit ein flussfreies Inneres, denn

$$B = \mu_0(M + H) = \mu_0(\chi H + H) = 0 \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{\partial M}{\partial H}. \quad (1)$$

Materialien mit $\chi < 0$ ($\chi > 0$) heißen *diamagnetisch* (*paramagnetisch*), gilt sogar $\chi = -1$ spricht man von einem *idealen Diamagnet*.

Bei Supraleitern bezeichnet man den Effekt den magnetischen Fluss vollständig aus dem Inneren der Probe zu verdrängen als *Meißner-Ochsenfeld-Effekt*. Er ist u.A. für das bekannte Levitieren supraleitender Materialien über hinreichend starken Magnetfeldern verantwortlich (Diamagnete erfahren Kräfte in Richtung Bereiche geringerer Feldstärke). Die Kompensation des angelegten Feldes durch die Magnetisierung des Supraleiters führt zu einer Charakteristik wie in Abb. 2 (links) dargestellt. Das abrupte Verschwinden der Magnetisierung bei B_C wird weiter unten erläutert.

Es gilt zu beachten, dass das Verdrängen des magnetischen Feldes aus dem Inneren des Supraleiters *nicht vollständig* durch seine Eigenschaft des idealen Leiters erklärt werden kann. Dies wird in Abb. 1 (rechts) qualitativ erläutert. Schaltet man bei einem idealen Leiter ein äußeres Magnetfeld zu, führen gemäß der LENZSCHEN-REGEL induzierte Wirbelströme zu einem Gegenfeld, welches ein feldfreies Inneres garantiert. Wird das Magnetfeld zugeschaltet *bevor* der Zustand idealer Leitfähigkeit erreicht wird, wird es anschließend nicht verdrängt, da keine *Änderung* des Flusses auftritt. Schaltet man nun das Magnetfeld aus, erhalten die induzierten Wirbelströme den ursprünglichen Fluss. Diese Effekte treten bei einem idealen Diamagneten (also bei Supraleitern) nicht auf. Diese verdrängen den Fluss *unabhängig von der Vorgeschichte* des Systems. Dies qualifiziert die Supraleitung als thermodynamische Phase und nicht als dynamisch begründbaren Effekt.

Typ I und Typ II Supraleiter Es stellt sich heraus, dass die Klassen supraleitender Materialien in zwei Subklassen zerfällt, die sich qualitativ in ihrem Verhalten im Magnetfeld unterscheiden.

- **Typ I Supraleiter** zeichnen sich durch zwei scharf voneinander getrennte Phasen aus. Unterhalb der Sprungtemperatur T_C befindet sich ein Typ I Supraleiter in der ideal diamagnetischen *Meißner-Phase*, gegeben das angelegte Magnetfeld überschreitet nicht die durch

$$H_c(T) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right] \quad (2)$$

gegebene kritische Feldstärke H_c . Für $H < H_c$ dringt das magnetische Feld nur in die Randschichten des Supraleiters ein und fällt dabei exponentiell ab (\rightarrow London'sche Eindringtiefe). Für $H > H_c$ geht die supraleitende in die normaleleitende Phase über und die das Magnetfeld kompensierende Magnetisierung verschwindet instantan. Dieses Verhalten ist in Abb. 2 (links) dargestellt.

Die meisten metallischen Elemente (z.B. Quecksilber) treten unterhalb einer sehr niedrigen Sprungtemperatur in die Meißner-Phase ein und sind daher Typ I Supraleiter. Die mikroskopische Erklärung dieses Phänomens wird durch die BCS-Theorie geliefert.

- **Typ II Supraleiter** befinden sich für $T < T_c$ und $H < H_{c1}$ wie Typ I Supraleiter in der ideal diamagnetischen Meißner-Phase. In diesem Zustand kompensiert die Magnetisierung das angelegte Magnetfeld vollständig und letzteres fällt am Rand des Supraleiters exponentiell ab. Erhöht man das Magnetfeld aber über H_{c1} , sodass eine zweite kritische Feldstärke H_{c2} nicht überschritten wird, tritt der Supraleiter in die sog. *Shubnikov-Phase* ein bevor er für $H > H_{c2}$ wieder normaleleitend wird. In der Shubnikov-Phase kann das Magnetfeld in Form quantisierter Flussschläuche den Supraleiter durchdringen (\rightarrow Flussquantisierung), die sich energetisch günstig in hexagonalen Gittern anordnen. Werden diese Flussschläuche nicht

durch Kristallfehler fixiert (*Pinning-Zentren*), driften sie auf Grund der Lorentz-Kraft bei einem stromdurchflossenen Typ II Supraleiter und erzeugen so einen elektrischen Widerstand. Das magnetische Verhalten eines Typ II Supraleiters ist in Abb. 2 (rechts) dargestellt.

Beispiele für Typ II Supraleiter sind die gerne zu Demonstrationszwecken eingesetzten keramischen Hochtemperatursupraleiter. Aber auch das in unserem Versuch verwendete Niob ist unterhalb seiner Sprungtemperatur $T_c = 9.5 \text{ K}$ ein Typ II Supraleiter. Die Supraleitung von Typ II kann noch nicht zufriedenstellend von der BCS-Theorie erklärt werden, wird aber durch die Ginzburg-Landau-Theorie phänomenologisch beschrieben.

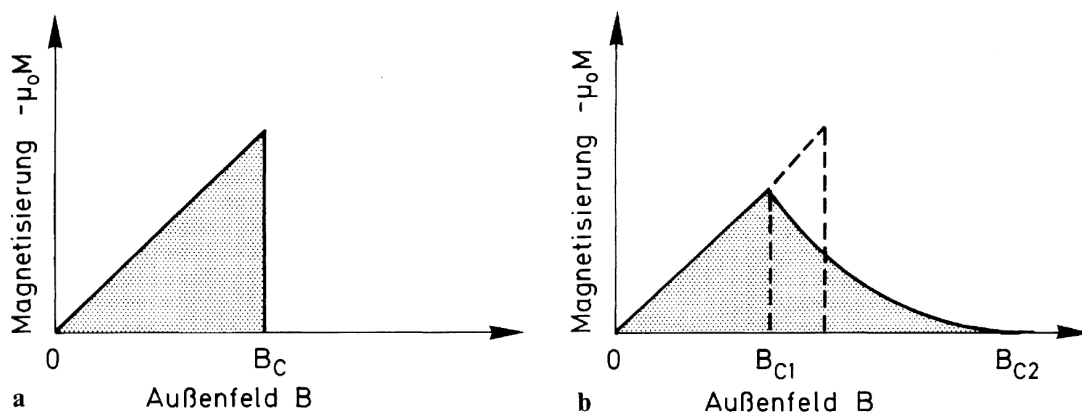


ABBILDUNG 2 : **Links:** Abhängigkeit der Magnetisierung eines Typ I Supraleiters vom angelegten Magnetfeld, aus [1]. Die Magnetisierung kompensiert das angelegte Magnetfeld bis zu einer (temperaturabhängigen) kritischen Magnetfeldstärke und bricht dann instantan zusammen. **Rechts:** Abhängigkeit der Magnetisierung eines Typ II Supraleiters vom angelegten Magnetfeld, aus [1]. Im Gegensatz zum Typ I Supraleiter kann hier das Magnetfeld ab einer gewissen kritischen Flussdichte B_{C1} in den Supraleiter eindringen – in Form von quantisierten Flussschläuchen.

Flussquantisierung Ein interessanter und technisch nützlicher Effekt der quantenmechanischen Beschreibung einer supraleitenden Phase ist die sog. *Flussquantisierung*. Man stelle sich zu diesem Zweck einen massiven Ring aus supraleitendem Material vor, dessen Inneres von einem Magnetfeld B durchsetzt sei, siehe Abb. 3 (rechts). Ist A die Fläche des Ringes, gilt für den magnetischen Fluss

$$\Phi = B \cdot A = n \cdot \phi_0 \quad \text{mit} \quad \phi_0 = \frac{h}{2e} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Hier bezeichnet h das Plancksche Wirkungsquantum, e die Elementarladung und ϕ_0 das *Flussquantum* oder *Fluxon*. Der magnetische Fluss durch den supraleitenden Ring ist also immer ein ganzzahliges Vielfaches des magnetischen Flussquants.

Die Interpretation ist dabei wie folgt. Legt man ein beliebiges Feld an (also i.A. kein Vielfaches des Flussquants), werden im supraleitenden Ring Supraströme einer passenden Stärke erzeugt, sodass das induzierte Magnetfeld den angelegten Fluss auf das nächste Vielfache des Flussquants "rundet". Die quantenmechanisch rigide Herleitung dieses Effekts ist im Rahmen der London-Theorie möglich und wird weiter unten vorgestellt.

Die Flussquantisierung ist auch bei Typ II Supraleitern wirksam (siehe Abb. 3) und führt zu quantisierten Flussschläuchen, die den Supraleiter durchsetzen.

1.1.2 Die London-Theorie

Die von Fritz und Heinz London 1935 entwickelte Theorie erklärt die magnetischen Eigenschaften, speziell den Meißner-Ochsenfeld-Effekt, phänomenologisch auf Grundlage eines Zwei-Flüssigkeiten-Modells. Hierbei wird angenommen, dass für niedrige Temperaturen die widerstandsbehaftete Leitung durch (normalleitende) Elektronen zunehmend durch die widerstandslose Leitung (supralei-

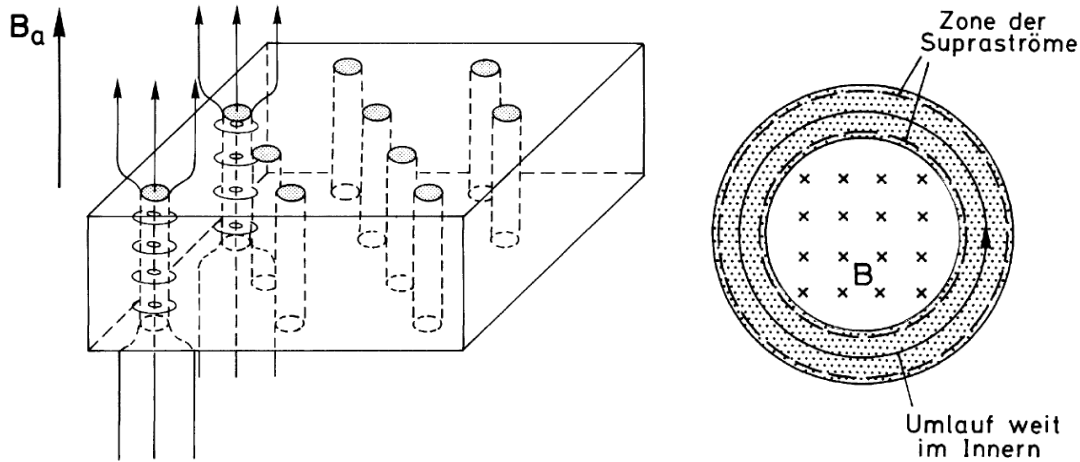


ABBILDUNG 3 : **Links:** Schematische Darstellung eines Typ II Supraleiters für $B_{C1} < B_a < B_{C2}$ (Shubnikov-Phase), aus [1]. Die magnetischen Flussschläuche (Vortices) enthalten jeweils Vielfache eines Flussquants ϕ_0 und ordnen sich in einem hexagonalen Gitter an. Innerhalb der Flussschläuche ist der Festkörper normalleitend. Die Flussschläuche werden von Supraströmen im Supraleiter begrenzt. **Rechts:** Von Magnetfeld B durchsetzter supraleitender Ring, wie er zur Herleitung der Flussquantisierung herangezogen wird, aus [1].

tender) Ladusträger ersetzt wird. Die Eigenschaften des Supraleiters sind nun Folge eines neuen "Ohmschen-Gesetzes", das nur für die supraleitenden Ladungsträger Gültigkeit hat. Während also für normalleitende Ladungsträger $\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$ gilt, nimmt man für supraleitende Ladungsträger die *London-Gleichung*

$$\mathbf{j}_s = \frac{nq\hbar}{m} \nabla S - \frac{nq^2}{m} \mathbf{A} \quad (4)$$

an. Hier ist n die Teilchenzahldichte der supraleitenden Ladungsträger, q deren Ladung und m deren Masse. S bezeichnet die ortsabhängige Phase der den supraleitenden Zustand beschreibenden Wellenfunktion und \mathbf{A} ist das elektromagnetische Vektorpotential.

Nimmt man eine statische Lösung ($\partial_t S = 0$) und Coulomb-Eichung ($\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$) an, lassen sich aus Gleichung (4) sofort die beiden *London-Gleichungen* ableiten

$$\partial_t \mathbf{j}_s = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E} \quad \text{1. London-Gleichung} \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{nq^2}{m} \mathbf{B} \quad \text{2. London-Gleichung} \quad (6)$$

Diese beschreiben mit $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$ den Zusammenhang zwischen Strom und elektromagnetischem Feld im Supraleiter.

Herleitung der London'schen Eindringtiefe Benutzen wir die statische Maxwellgleichung $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ sowie die Divergenzfreiheit $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und damit $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$ erhalten wir aus der 2. London-Gleichung

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (7)$$

für $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s$ und mit der *London'schen Eindringtiefe* $\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 nq^2}}$. Die Interpretation als Eindringtiefe lässt sich leicht begründen. Man nehme ein parallel zur Oberfläche eines Supraleiters in z -Richtung anliegendes Magnetfeld an, das im Außenraum eine Flussdichte von $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ aufweist. Dann gilt es Gleichung (7) mit der Randbedingung $\mathbf{B}(x=0) = B_0 \mathbf{e}_z$ zu lösen, wenn \mathbf{e}_x die Normale in den Supraleiter hinein bezeichnet. Eine einfache Rechnung liefert die Lösung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{für } x \geq 0. \quad (8)$$

Das Magnetfeld klingt im Supraleiter also exponentiell mit der charakteristischen Länge λ_L ab und führt so – bis auf eine dünne Oberflächenschicht – zu einem feldfreien Inneren.

Herleitung der Flussquantisierung Zur Herleitung der Flussquantisierung durch einen supraleitenden Ring betrachten wir ein Setting wie in Abb. 3 (rechts) dargestellt. Aus der London-Gleichung (4) und dem Ansatz einer statischen Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0 \cdot \exp[iS(\mathbf{r})]$ mit $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_0|^2 = n$ der Teilchenzahldichte der supraleitenden Ladungsträger (ortsunabhängig!) ergibt sich im supraleitenden Inneren des Ringes (Abstand vom Rand viel größer als λ_L , also $\mathbf{B} = 0$ und damit $\mathbf{j} = 0$)

$$\frac{nq\hbar}{m} \nabla S = \frac{nq^2}{m} \mathbf{A}. \quad (9)$$

Ein Wegintegral im supraleitenden Inneren einmal um den Ring herum wird durch die Bedingung eingeschränkt, dass sich die Phase bei jedem Umlauf um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ändern muss, da die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r})$ eine wohldefinierte Funktion des Ortes ist. Formal folgt also

$$2\pi s = \oint_{\text{Ring}} \nabla S \, d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar} \oint_{\text{Ring}} \mathbf{A} \, d\mathbf{r} \quad \text{für } s \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Mit dem SATZ VON STOKES folgt schließlich

$$2\pi s = \frac{q}{\hbar} \oint_{\text{Ring}} \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{Ring}} \nabla \times \mathbf{A} \, d\mathbf{o} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{Ring}} \mathbf{B} \, d\mathbf{o} = \frac{q}{\hbar} \Phi. \quad (11)$$

Also gilt die schon oben beschriebene Flussquantisierung $\Phi = \frac{\hbar}{q} s = \phi_0 s$ mit $s \in \mathbb{Z}$ innerhalb supraleitender Leiterschleifen. Da die Ladung der supraleitenden Ladungsträger $q = -2e$ ist, wird mikroskopisch erst durch die BCS-Theorie erklärt (\rightarrow Cooperpaare).

1.1.3 Die Ginsburg-Landau-Theorie

Die Landau-Theorie beschreibt allgemein Phasenübergänge 2. Ordnung unter der Annahme, dass sich die freie Energie des betrachteten Systems in der Nähe des Phasenübergangs in eine Potenzreihe nach einem Ordnungsparameter entwickeln lässt. Übertragen auf die Supraleitung ergibt sich für die freie Energie der Ausdruck

$$F = F_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - 2e\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \quad (12)$$

mit dem komplexen Ordnungsparameter $\Psi(\mathbf{r})$ und der freien Energie des Normalzustandes F_n . α und β sind phänomenologisch zu wählende Parameter und können i.A. von der Temperatur abhängen. Mit der Interpretation $n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$ ergibt sich ein entscheidender Unterschied zur oben behandelten London-Theorie. Während dort die Teilchenzahldichte n der supraleitenden Ladungsträger unabhängig vom Ort war, kann sie im Rahmen der Ginsburg-Landau-Theorie vom Ort abhängen. Damit lassen sich auch lokal nicht-supraleitende Bereiche in der ansonsten supraleitenden Phase beschreiben (\rightarrow Flussschläuche).

Mit Hilfe der Variationsrechnung lässt sich die freie Energie (12) minimieren und man erhält die beiden Ginsburg-Landau-Gleichungen

$$0 = \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - 2e\mathbf{A} \right)^2 \psi \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{m} \text{Re} \left[\psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - 2e\mathbf{A} \right) \psi \right]. \quad (14)$$

Diese bestimmen das Feld des komplexen Ordnungsparameters $\Psi(\mathbf{r})$ in Abhängigkeit von Temperatur T und Vektorpotential \mathbf{A} (bzw. Magnetfeld \mathbf{B}). Die Ginsburg-Landau-Gleichungen beschreiben eine spontane Symmetriebrechung für $T \rightarrow T_c + 0$ und sind in der Lage das Eindringen des magnetischen Feldes für $B > B_{c1}$ bei Typ II Supraleitern zu erklären. Allerdings sei angemerkt, dass auch die Ginsburg-Landau-Theorie *keine* mikroskopische Erklärung der Supraleitung liefert.

1.1.4 Die BCS-Theorie

Die BCS-Theorie ist nach ihren Schöpfern John Bardeen, Leon N. Cooper und John R. Schrieffer benannt, die mit ihr 1957 den Versuch unternahm eine quantenmechanische Erklärung für die Supraleitung zu finden. Sie gilt heute als allgemein anerkannte Erklärung für Typ I Supraleitung, wobei der zentrale Mechanismus, die Cooperpaarbildung, auch bei Typ II Supraleitern eine entscheidende Rolle spielt.

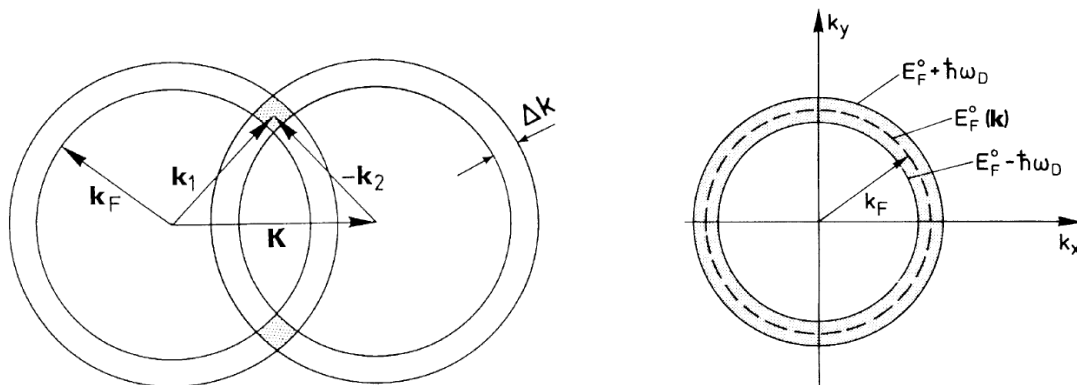


ABBILDUNG 4 : **Links:** Impulsbilanz bei der phononvermittelten Streuung zweier Elektronen nahe der Fermikante \mathbf{k}_F , aus [1]. **Rechts:** Möglicher Bereich eines Impulsvektors nach der Streuung, aus [1]. Da die mittlere Phononenenergie durch $\hbar\omega_D$ gegeben ist, kann der Impulsvektor eines Elektrons nahe der Fermikante nur in einer schmalen Schale um die Fermikugel zu liegen kommen, wenn die bei der Streuung ausgetauschte Energie über Phononen vermittelt wird.

Die entscheidende Beobachtung, die zur BCS-Theorie führt, besteht in der Instabilität des Grundzustandes eines Fermi-Sees quasifreier Elektronen im Festkörper. Für wechselwirkungsfreie Elektronen gilt das Pauli-Prinzip und damit die Fermi-Statistik, wonach für $T = 0$ jeder elektronische Zustand von genau zwei Elektronen (Spin up & down) besetzt werden kann. Auf diese Weise wird der Fermi-See bis zur Fermi-Energie E_F "aufgefüllt". Es lässt sich nun zeigen, dass für eine beliebige, endliche *attraktive* Wechselwirkung zwischen den Elektronen der Fermi-Grundzustand instabil wird und sich ein Zustand bosonischer Paare aus fermionischen Elektronen ausbildet. Diese sog. *Cooperpaare* bestehen aus jeweils zwei Elektronen mit antiparallelem Spin und Quasiimpuls. Da der Spin eines solchen Cooperpaares verschwindet sind sie nach dem Spin-Statistik-Theorem der Bose-Einstein-Statistik unterworfen und können alle den selben Grundzustand besetzen.

Kühlt man einen supraleitenden Feststoff unter seine Sprungtemperatur beginnen Elektronen an der Fermikante als Cooperpaare in den BCS-Grundzustand auszukondensieren. Die Cooperpaare können in diesem Grundzustand von einer einzigen den Supraleiter umfassenden Wellenfunktion beschrieben werden und tragen zum widerstandslosen Stromtransport bei. Es sei darauf hingewiesen, dass erst für $T = 0$ *alle* Elektronen zu Cooperpaaren kondensiert sind.

Bindungsmechanismus Wie oben erwähnt, ist der Ursprung der attraktiven Wechselwirkung zwischen den Elektronen unwichtig für den Mechanismus der Cooperpaarbildung. Es stellt sich nun die Frage, wie diese Wechselwirkung in Festkörpern zustande kommt.

Ein intuitives Bild wird über die von einem Elektron hervorgerufene Gitterdeformation vermittelt. Die Coulombkraft zwischen einem durch das Gitter driftenden Elektron und den umliegenden Atomrümpfen führt zu einer Gitterdeformation mit positiver Ladung die sich hinter besagtem Elektron herbewegt. Dieses positiv geladene "Fahrwasser" wirkt attraktiv auf ein zweites Elektron und koppelt es indirekt an das Erste. Obwohl dieses Bild den eigentlichen quantenmechanischen Mechanismus nicht korrekt beschreibt, gibt es doch einen entscheidenden Hinweis über die Natur der Kopplung: Das Gitter fungiert als Mittler der Wechselwirkung. Im quantenmechanischen Bild lässt sich dies als Elektron-Phonon-Elektron-Kopplung beschreiben oder als phononenvermittelten Impulsaustausch zwischen zwei Elektronen.

Für eine solche Streuung gilt die Erhaltung der Quasiimpulse der beteiligten Elektronen. Weiterhin ist die übertragene Energie durch die mittlere Phononenenergie beschränkt. Diese ist über die Debyefrequenz ω_D zu $\hbar\omega_D$ gegeben. Damit können nur Elektronen mit Impulsen auf einer Schale der durch die Energie $2\hbar\omega_D$ gegebenen Dicke miteinander wechselwirken, siehe hierfür Abb. 4 (rechts). Betrachtet man der Einfachheit halber zwei Elektronen knapp über der Fermikante ergeben sich die Bedingungen

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{K} = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 \quad \text{und} \quad ||\mathbf{k}_i| - |\mathbf{k}'_i|| \leq \Delta k \quad \text{sowie} \quad |\mathbf{k}_i|, |\mathbf{k}'_i| \geq k_F. \quad (15)$$

Hier ist Δk über die Dispersionsrelation auf $\hbar\omega_D$ zurückzuführen. Diese Bedingungen sind in Abb. 4 (links) grafisch veranschaulicht (man stelle sich die Fermikugeln dreidimensional vor). Nur Elektronen in grau unterlegten Bereich (bzw. Volumen) des reziproken Raumes sind demnach zur Wechselwirkung über Phononenstreuung fähig. Die Stärke der Wechselwirkung ist nun direkt über die Anzahl der möglichen Austauschprozesse mit dem grau schattierten Volumen verknüpft. Es ist leicht einzusehen, dass sich dieses Volumen für

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \quad (16)$$

maximieren lässt, da dann beide Kugelschalen zusammenfallen. Folglich koppeln vornehmlich Elektronen mit antiparallelem Quasiimpuls zu Cooperpaaren. Deren Energie liegt um Δ niedriger als die Energie des ungebundenen Einzelelektronenzustandes. Bricht man ein Cooperpaar auf (erzeugt also zwei ungepaarte Elektronen) muss die Energie 2Δ aufgewendet werden. Diese Energielücke zwischen dem BCS-Grundzustand und den angeregten Elektronenzuständen ist verantwortlich für den verschwindenden elektrischen Widerstand bei niedrigen Temperaturen. Ist die durch Streuprozesse am Gitter übertragbare Energie kleiner als 2Δ , kann kein Cooperpaar aufgebrochen werden. Die Streuung von Cooperpaaren wird daher unterdrückt und der Widerstand verschwindet. Es lässt sich experimentell nachweisen, dass die Supraströme von Ladungsträgern mit Ladung $q = -2e$ getragen werden.

Zustandsdichte Die Zustandsdichte in der supraleitenden Phase unterscheidet sich grundlegend von der normalleitenden Phase. In Abb. 5 (links,a) ist die Zustandsdichte D_s normiert auf die Zustandsdichte D_n der normalleitenden Phase gegen die Energie aufgetragen. Die Energie $E_k = 0$ muss hier mit dem Fermi-Niveau identifiziert werden. Die freien Elektronenzustände die beim Normalleiter bis an die Fermikante reichen werden im Supraleitenden Zustand durch eine Energielücke Δ von Letzter getrennt. Wie oben erläutert ist dies der Grund für den verschwindenden elektrischen Widerstand. Es gilt zu beachten, dass am Rand der Energielücke eine Divergenz der Zustandsdichte auftritt, die sich direkt auf die I-U-Charakteristik von Normal- und Supraleitertunnelkontakten auswirkt.

Das in Abb. 5 (links,b) dargestellte Anregungsspektrum zeigt schematisch die Energielücke Δ zwischen dem BCS-Grundzustand und den angeregten Einzelelektronenzuständen. Es sei darauf hingewiesen, dass beim Aufbrechen eines Cooperpaares *zwei* Elektronen in das Anregungsband gehoben werden müssen, weshalb die Bindungsenergie eines Cooperpaares durch 2Δ gegeben ist.

Die BCS-Theorie sagt voraus, dass die Energielücke mit steigender Temperatur kleiner wird, bis sie für $T = T_c$ ganz verschwindet. Die folgende transzendente Gleichung bestimmt implizit die Energielücke $\Delta = \Delta(T)$

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \tanh \left[\frac{T_c}{T} \cdot \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right]. \quad (17)$$

Rechnungen liefern für die maximale Energielücke $\Delta(0) = 1.76 \cdot k_B T_c$. Eine Entwicklung in der Nähe des Phasenübergangs liefert die explizite Abhängigkeit

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74 \cdot \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \quad \text{für} \quad T \rightarrow T_c - 0. \quad (18)$$

Die theoretische Abhängigkeit ist zusammen mit Messwerten in Abb. 5 (rechts) dargestellt.

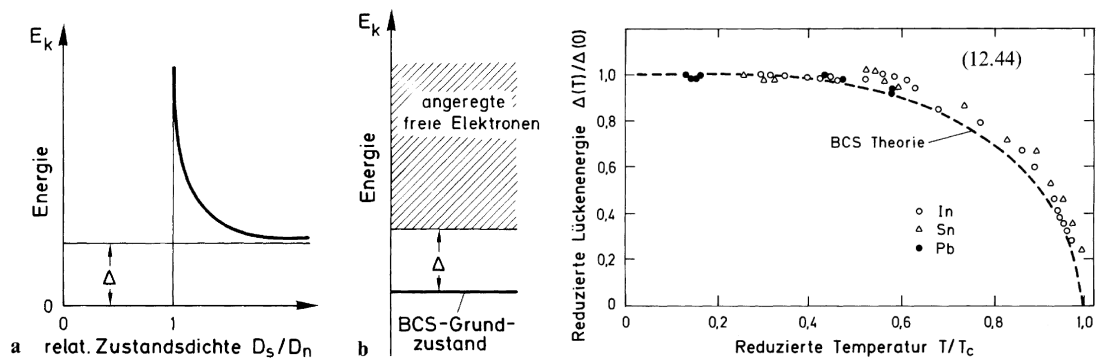


ABBILDUNG 5 : **Links:** Die von der BCS-Theorie vorhergesagte Zustandsdichte freier Elektronen im Supraleitenden Zustand (a) zeichnet sich durch eine Energielücke Δ aus, die eine thermische Anregung der Cooperpaare bei niedrigen Temperaturen verhindert. In (b) ist dieser Sachverhalt in der Banddarstellung veranschaulicht, aus [1]. **Rechts:** Theoretische und experimentelle Abhängigkeit der Energielücke Δ von der Temperatur T , aus [1]. Für $T \rightarrow T_c$ schließt sich die Lücke zunehmend um beim Übergang in den normalleitenden Zustand vollständig zu verschwinden.

1.2 Tunnelprozesse und Josephson-Effekte

Im folgenden Abschnitt werden Tunnelprozesse zwischen Normalleitern, Normalleitern und Supraleitern sowie zwischen Supraleitern erläutert. Weiterhin werden die Josephson-Gleichungen hergeleitet und die resultierenden Effekte diskutiert. Anschließend werden das RCSJ-Modell eines Josephson-Kontaktes beschrieben und die Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes erläutert.

1.2.1 Tunnelprozesse

Das Tunneln von massiven Teilchen durch Potentialbarrieren, die sie im Rahmen der klassischen Mechanik nicht überwinden könnten, ist eine zentrale und zugleich erstaunliche Vorhersage der Quantenmechanik. Generell hängt die Stärke des Tunnelstromes ab von

- der Dichte beweglicher Elektronen auf der einen Seite des Kontaktes.
- der Wahrscheinlichkeit die Barriere zu durchtunneln (Diese fällt exponentiell mit der Breite des Potentialwalls ab).
- der Dichte unbesetzter Elektronenzustände auf der anderen Seite des Kontaktes.

Im folgenden sollen drei Tunnelkontakte qualitativ beschrieben werden.

Normalleiter - Normalleiter Trennt man zwei (der Einfachheit halber gleiche) Normalleiter durch einen dünnen isolierenden Film (z.B. eine Oxidschicht), so liegen die Fermi-niveaus ohne angelegte Spannung auf beiden Seiten gleichauf. Im Zeitmitteln tunneln ebenso viele Elektronen von links nach rechts wie umgekehrt. Folglich fließt kein Nettostrom durch den Kontakt.

Legt man eine Spannung $U \neq 0$ an den Kontakt an, führt dies zu einer erzwungenen Stufe eU zwischen den Fermi-niveaus der beiden Kontakthälften. Dies ist schematisch für $T = 0$ in Abb. 6 (a) dargestellt. Durch die nun in der positiven Kontakthälfte erreichbaren freien Zustände überwiegt die Zahl der von links nach rechts tunnelnden Elektronen und man misst einen nicht verschwindenden Tunnelstrom. Die I-U-Kennlinie gleicht der eines Ohmschen-Widerstandes, siehe Abb. 6 (b).

Normalleiter - Supraleiter Ersetzt man in obigem Setting einen der Normalleiter durch einen Supraleiter ändert sich die Strom-Spannungs-Charakteristik auf Grund der modifizierten Zustandsdichte des Supraleiters. Das Fermi-niveau im Supraleiter wird durch die Energie der Cooper-Paare

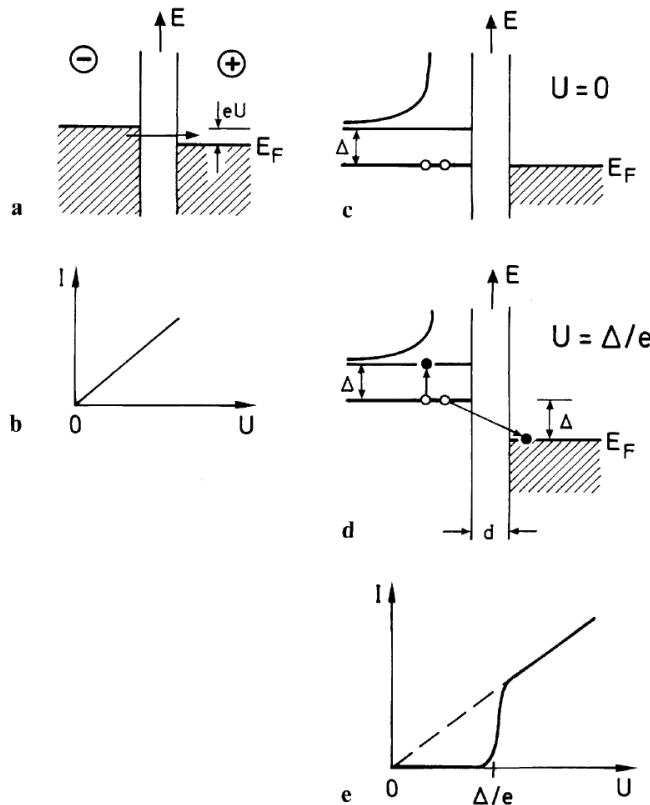


ABBILDUNG 6 : **Links:** Besetzte Zustände und Fermienergie eines Normalleiter-Normalleiter Tunnelkontaktes bei $T = 0$ und angelegter Spannung $U \neq 0$ (a). Die sich ergebende I-U-Charakteristik des Tunnelstromes entspricht der eines ohmschen Widerstandes (b), aus [1]. **Rechts:** Besetzte Zustände und Energieniveaus eines Supraleiter-Normalleiter Tunnelkontaktes bei $T = 0$ für $U = 0$ (c) bzw. $U = \Delta/e$ (d). Im spannungslosen Fall können weder Cooper-Paare gespalten werden, noch können Einzelelektronen vom Normalleiter in den Supraleiter tunneln. Erst ab einer Spannung von $\pm \Delta/e$ existieren freie Einzelelektronenzustände auf Höhe des Fermienergie im Supraleiter bzw. wird beim Übergang eines vormals gebundenen Elektrons des Supraleiters zum Normalleiter genügend Energie frei um Cooper-Paare zu spalten. Diese Effekte ergeben für beide Polungen die I-U-Charakteristik in (e), aus [1].

bestimmt. Diese liegt, wie im letzten Kapitel erläutert, um Δ niedriger als die ersten Zustände ungebundener Elektronen.

Betrachten wir den Fall $T = 0$ und $U = 0$ sind diese Zustände unbesetzt und alle Elektronen im Supraleiter sind als Cooper-Paare im Grundzustand auf Höhe des Fermienergie. Dies ist in Abb. 6 (c) dargestellt. Auf Grund der Energielücke im Supraleiter werden Tunnelprozesse von Rechts nach Links unterbunden (keine freien Einzelelektronenzustände auf dem Fermienergie). Umgekehrt können nur Einzelelektronen vom Supraleiter in den Normalleiter tunneln. Hierfür müssten Cooper-Paare aufgespalten werden, was für $T = 0$ nicht möglich ist. Daher fließt ohne Spannung kein Tunnelstrom. Ist die angelegte Spannung U kleiner als Δ/e ändert sich qualitativ an obigen Argumenten nichts. Erst für $U = \Delta/e$ ergibt sich die in Abb. 6 (d) dargestellte Situation.

Nun reicht die Energiedifferenz zwischen den Energieniveaus aus, um Cooper-Paare zu spalten und einen Tunnelstrom fließen zu lassen. Die Energie, die zum Anheben eines der Elektronen in die höheren freien Zustände des Supraleiters nötig ist, wird beim Übergang des anderen Elektrons in den Normalleiter wieder frei.

Kehrt man die Polung der Spannung um, werden keine Cooper-Paare zerlegt. Stattdessen befindet sich nun das Fermienergie des Normalleiters auf Höhe der ersten freien Einzelelektronenzustände des Supraleiters. Folglich tunneln vorzugsweise freie Elektronen des Normalleiters in den Supraleiter.

Die I-U-Charakteristik beider Polungen unterscheidet sich nicht und ist in Abb. 6 (e) schematisch dargestellt. Man erkennt, dass erst für Δ/e ein messbarer Tunnelstrom einsetzt, der sich für $U \gg \Delta/e$ wieder wie der Strom eines ohmschen Widerstandes verhält. Ursache hierfür ist, dass die Zustandsdichte eines Supraleiters für hohe Energien der eines Normalleiters entspricht. Nur nahe der zustandsfreien Zone um die Grundzustandsenergie herum führt die erwähnte Singularität zu einer Abweichung vom Normalleiter.

Supraleiter - Supraleiter Ersetzt man in vorigem Setting den verbleibenden Normalleiter durch einen Supraleiter erhält man einen Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontakt. Im Folgenden wird nur der Tunnelprozess von Einzelelektronen betrachtet (im Kontext von Supraleitern als Quasiteilchen interpretiert). Im Prinzip ist nun auch das Tunneln von Cooper-Paaren selbst möglich – dies führt zum Josephson-Effekt und wird weiter unten behandelt.

Im allgemeinen Fall müssen die Supraleiter nicht gleich sein; daher gehen wir von Energielücken Δ_1 und Δ_2 aus (o.B.d.A sei $\Delta_1 \geq \Delta_2$). Für $T = 0$ und $U = 0$ liegen die Grundzustandsenergien der Cooper-Paare gleichauf und für die Zustandsdichte ergibt sich qualitativ das Bild in Abb. 7 (a). In diesem Zustand ist das Aufspalten von Cooper-Paaren in Verbindung mit einem Tunnelübergang in keine Richtung energetisch möglich. Es fließt also kein Einzelelektronentunnelstrom. Erhöhen wir die Spannung bleibt dieses Argument gültig bis $U = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$. Es ergibt sich das Bild in Abb. 7 (b). Das Aufbrechen von Cooper-Paaren ist weiterhin unterbunden. Für $T > 0$ sind aber vornehmlich Einzelektronenzustände im Supraleiter mit der geringeren Energielücke besetzt. Diese Elektronen können nun in freie Zustände nahe der Singularität des Supraleiters mit der größeren Bandlücke tunneln. Es setzt also ein Tunnelstrom ein, der für höhere Spannungen wieder abnimmt, da die Zustandsdichte im Supraleiter mit der größeren Energielücke von der Singularität an sinkt. Dieses Verhalten ist in der I-U-Charakteristik in Abb. 7 (d) als gestrichelte Linie mit $T \neq 0$ dargestellt.

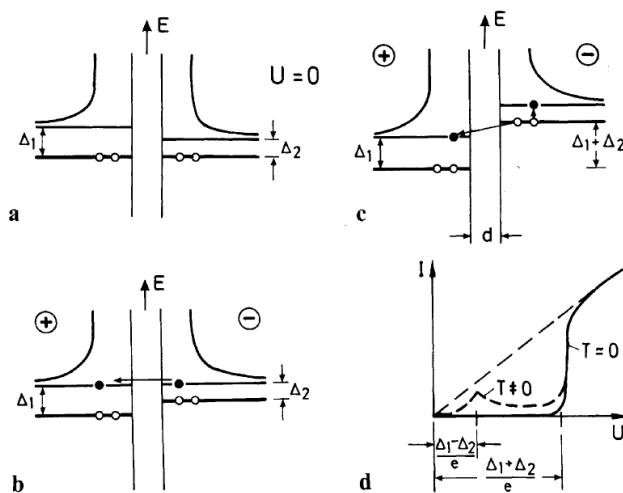


ABBILDUNG 7 : **Links:** Zustandsdichten und Besetzung eines Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes für $T = 0$ und $U = 0$ (a) bzw. $T > 0$ und $U = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ (b), aus [1]. Für $T = 0$ sind keine freien Elektronenzustände besetzt und in beiden Fällen ist kein Einzelelektronentunnelstrom möglich. Für $T > 0$ können für $U = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ angeregte, freie Elektronen des negativen Supraleiters in freie Zustände nahe der Singularität des positiven Supraleiters tunneln. Für höhere Spannungen entspricht dieser Effekt einem Normalleiter-Normalleiter Tunnelkontakt. **Rechts:** Zustandsdichten und Besetzung eines Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes für $T = 0$ und $U = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ (c). Ab dieser Spannung ist das Aufbrechen von Cooper-Paaren des negativen Supraleiters durch die beim Einzelelektronentunneln freiwerdende Energie möglich. Es setzt auch für $T = 0$ ein Tunnelstrom ein. Die I-U-Charakteristik für $T > 0$ und $T = 0$ ist in (d) dargestellt, aus [1].

Sowohl für $T = 0$ als auch für $T > 0$ ergibt sich erst für $U = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ ein neuer Tunnelmechanismus. Diese Situation ist in Abb. 7 (c) dargestellt. Jetzt reicht die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand des negativen Supraleiters und den ersten freien Elektronenzuständen des positiven Supraleiters aus, um die Cooper-Paare des negativen Supraleiters aufzubrechen. Die durch das Tunneln von Einzelelektronen in die Nähe der Singularität des positiven Supraleiters freiwerdende Energie wird genutzt, um die “Partnerelektronen” des einstigen Cooper-Paares in die ersten freien Zustände des negativen Supraleiters zu heben. Dieser Mechanismus führt auch für $T = 0$ zu einem messbaren Tunnelstrom, wie in Abb. 7 (d) dargestellt. Für große Spannungen $U \gg (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ nähern sich die relevanten Bereiche der Zustandsdichten wieder denen von Normalleitern an und die I-U-Charakteristik wird ohmsch.

1.2.2 Die Josephson-Gleichungen

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, ist bei einem Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontakt auch das Tunneln von Cooper-Paaren selbst möglich. Dieser Effekt und seine Konsequenzen wurde 1962

von Brian D. Josephson theoretisch vorhergesagt und ist Gegenstand dieses Versuches. Man unterscheidet zwei qualitativ verschiedene Effekte, die beide letztlich auf den bosonischen Charakter der Cooper-Paare in Verbindung mit ihrer quantenmechanischen Beschreibung zurückzuführen sind:

- **Der Gleichstrom/DC-Josephson-Effekt** beschreibt einen spannungslosen über den Tunnelkontakt fließenden Gleichstrom.
- **Der Wechselstrom/AC-Josephson-Effekt** beschreibt einen über den Tunnelkontakt fließenden Wechselstrom bei angelegter Gleichspannung.

Um quantitative Aussagen über besagte Effekte zu erhalten stellen wir uns einen Aufbau wie in Abb. 8 (a) und eine Beschaltung wie in (b) vor (hier mit $R = 0$).

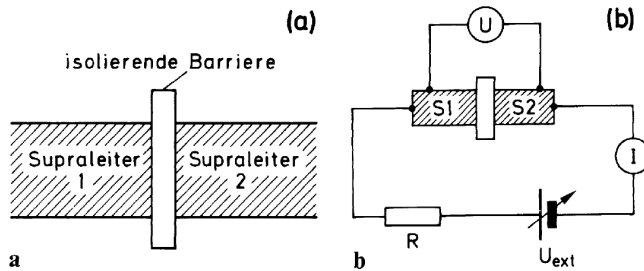


ABBILDUNG 8 : **Links:** Struktur eines Supraleiter-Supraleiter-Tunnelkontaktes wie er für die Untersuchung der Josephson-Effekte Verwendung findet, aus [1]. **Rechts:** Beschaltung des Kontaktes mit einer regelbaren externen Spannungs- und Stromquelle, aus [1]. Für die Herleitung der Josephson-Gleichungen ist $R = 0$.

Im Folgenden sollen die Josephson-Gleichungen hergeleitet werden. Diese bilden den theoretischen Rahmen der Josephson-Effekte und lassen sich unter der Annahme die Cooper-Paar Dichte in beiden Supraleitern sei homogen (i.e. ortsunabhängig) herleiten. Folglich kann nur die Phase der den Grundzustand beschreibenden Wellenfunktion räumlich variieren. Wir gehen davon aus, dass die Phasen in Supraleiter 1 und 2 zumindest entlang der Tunnelbarriere konstant sind. Dann lassen sich die Wellenfunktionen schreiben als

$$\Psi_1 = \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad \Psi_2 = \sqrt{n_2} e^{i\varphi_2} \quad (19)$$

mit der Interpretation $|\Psi_i|^2 = n_i$ als Cooper-Paar Dichte. Diese müssen in entsprechenden Supraleitern die Schrödingergleichungen

$$\partial_t \Psi_i = -\frac{i}{\hbar} E_i \Psi_i \quad (20)$$

erfüllen. Beide Supraleiter koppeln über die Barriere schwach miteinander. Formal berücksichtigt man diese Kopplung durch phänomenologische Ergänzungsterme der Schrödingergleichungen. Man erhält

$$\partial_t \Psi_i = -\frac{i}{\hbar} (E_i \Psi_i + K \Psi_j) \quad \text{wobei} \quad i \neq j \quad \text{und} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (21)$$

mit der Kopplungskonstanten K . Setzt man obige Wellenfunktionen in beide Gleichungen ein, ergibt sich

$$\frac{\dot{n}_i}{2\sqrt{n_i}} e^{i\varphi_i} + i\sqrt{n_i} e^{i\varphi_i} \dot{\varphi}_i = -\frac{i}{\hbar} [E_i \sqrt{n_i} e^{i\varphi_i} + K \sqrt{n_j} e^{i\varphi_j}] \quad (22)$$

Wir nehmen nun an, dass Supraleiter 1 und 2 von gleichem Typ sind. Dann stimmen deren Cooper-Paar Dichten überein, $n_1 = n_2 \equiv n$. Weiterhin gilt die Erhaltung der Ladungsträger, also $\dot{n}_1 V_1 = -\dot{n}_2 V_2$ mit den Volumina V_i der Supraleiter. Der Realteil von Gleichung (22) für $i = 1$ und $j = 2$ liefert die Beziehung

$$\dot{n}_1 = \frac{2K}{\hbar} n_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -\dot{n}_2 \quad (23)$$

Bilden wir die Differenz der Imaginärteile der beiden Gleichungen in (22), so folgt

$$\frac{d}{dt} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{\hbar} (E_2 - E_1) \quad (24)$$

Mit den Volumina V_i der Supraleiter kann der über die Barriere fließende Cooper-Paar-Strom geschrieben werden als $I_1 = -I_2 = \dot{n}_1 V_1 \cdot 2e \equiv I_s$. Wir erhalten also

$$I_s = \frac{4KeV_1n_1}{\hbar} \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = I_c \cdot \sin \delta \quad (25)$$

wobei wir $\delta \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ und $I_c \equiv \frac{4KeV_1n_1}{\hbar}$ gesetzt haben. Dies ist die *1. Josephson-Gleichung* mit dem (maximalen) Josephson-Strom I_s (I_c). Sie beschreibt den Cooper-Paar-Tunnelstrom in Abhängigkeit von der Phasendifferenz der Wellenfunktionen in beiden Supraleitern.

Die Energiedifferenz des Cooper-Paar-Grundzustandes ist über die angelegte Spannung zu $E_2 - E_1 = 2e \cdot U$ festgelegt. Eingesetzt in (24) erhalten wir die *2. Josephson-Gleichung*

$$\dot{\delta} = \frac{2e}{\hbar} U. \quad (26)$$

Diese beschreibt die Dynamik der Phasendifferenz in Abhängigkeit von der angelegten Spannung.

DC-Josephson-Effekt Zur Beobachtung des DC-Josephson-Effektes misst man den Tunnelstrom I in Abb. 8 (rechts) bei $U = 0$. An den Kontakt ist also nur eine Stromquelle angeschlossen. Nach der 2. Josephson-Gleichung ist $\dot{\delta} = 0$ also $\delta = \text{const.}$ Diese Phasendifferenz hängt nur noch vom angelegten Strom ab (der ja durch die Stromquelle festgelegt wird). Die 1. Josephson-Gleichung sagt uns dann einen nicht verschwindenden, zeitlich konstanten Tunnelstrom I_s voraus. Das Auftreten eines spannungslosen, konstanten Tunnelstromes wird als *DC-Josephson-Effekt* bezeichnet.

Erhöht man den Tunnelstrom I über I_c so bricht das Cooper-Paar-Tunneln zusammen und es fällt die für den Strom I nötige Spannung am Kontakt ab. Der dann gültige Tunnelprozess entspricht dem schon erläuterten Supraleiter-Supraleiter-Einzelelektronentunneln. Daher muss für die abfallende Spannung $U \geq 2\Delta/e$ gelten. Beim absenken des Tunnelstromes unter I_c kommt es ohne zusätzliche Maßnahmen zur Hysterese; der Tunnelstrom folgt der Kennlinie des Einzelelektronentunnelns bis zu $I = 0$. Die resultierende I-U-Kennlinie ist in Abb. 9 dargestellt.

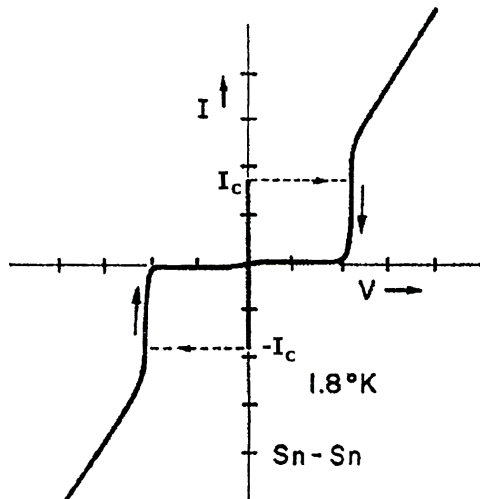


ABBILDUNG 9 : I-U-Kennlinie eines hysteretischen Josephson-Kontaktes, aus [2]. Erhöhen des Tunnelstromes führt zu einem spannungslosen Anstieg bis zum maximalen Josephson-Strom I_c . Danach springt die Kennlinie auf die des "normalen" Supraleiter-Supraleiter-Tunnelkontaktes (Einzelelektronentunneln). Beim Reduzieren des Stromes zeigt sich ein hysteretisches Verhalten, d.h. die Spannung folgt der klassischen Supraleiter-Supraleiter-Charakteristik bis zu $I = 0$.

AC-Josephson-Effekt Zur Beobachtung des AC-Josephson-Effektes misst man den Tunnelstrom I in Abb. 8 (rechts) bei $U \neq 0$. Der 2. Josephson-Gleichung zufolge gilt

$$\delta = \frac{2e}{\hbar} U \cdot t + \delta_0 = \omega_J t + \delta_0 \quad (27)$$

mit der Josephsonfrequenz $\omega_J = \frac{2e}{\hbar}U$. Die 1. Josephson-Gleichung beschreibt nun einen mit ω_J oszillierenden Wechselstrom

$$I_s(t) = I_c \cdot \sin(\omega_J t + \delta_0). \quad (28)$$

Dieses Phänomen wird als *AC-Josephson-Effekt* bezeichnet.

Man erkennt sofort, dass sich bei bekannter Spannung U durch Frequenzmessungen des Stromes das Verhältnis von Elementarladung zu Planckschem Wirkungsquantum bestimmen lässt. Dies wird praktisch durch die sehr hohen Frequenzen ω_J erschwert (schon für Spannungen im mV-Bereich treten Frequenzen im GHz-Bereich auf). Praktisch benutzt man den AC-Josephson-Effekt heute zur Kopplung von Frequenznormalen an Spannungsnormale. D.h. die Eichung von Spannungsmessgeräten lässt sich auf die Eichung mittels Frequenznormal zurückführen.

1.2.3 Das RCSJ-Modell

Das *Resistively and Capacitively Shunted Junction model* (RCSJ-Modell) dient zur Beschreibung einer großen Klasse realer Josephson-Kontakte (sog. *weak-link* Kontakte), indem es den mit verschwindender Kapazität und unendlichem Widerstand für ungepaarte Elektronen ausgestatteten *idealen* Josephson-Kontakt durch eine parallel geschaltete Kapazität und einen parallel geschalteten ohmschen Widerstand ergänzt. Das Ersatzschaltbild eines solchen *realen* Josephson-Kontaktes ist in Abb. 10 dargestellt.

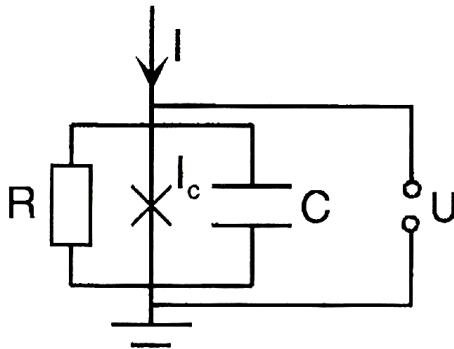


ABBILDUNG 10 : Ersatzschaltbild eines realen Josephson-Kontaktes im RCSJ-Modell, aus [2]. Der ideale Josephson-Kontakt ist mit einem Kreuz markiert und wird durch seinen maximalen Josephson-Strom I_c charakterisiert. Parallel hierzu werden ein ohmscher Widerstand R und eine Kapazität C geschaltet.

Offensichtlich setzt sich der Gesamtstrom des Tunnelkontaktes zusammen aus dem Josephsonstrom I_s , dem Einzelelektronenstrom durch den Widerstand I_R sowie dem Verschiebungsstrom durch den Kondensator I_C

$$I = I_s + I_R + I_C = I_c \cdot \sin \delta + \frac{U}{R} + C\dot{U}. \quad (29)$$

Mit $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\delta} = \frac{\phi_0}{2\pi} \dot{\delta}$ ergibt sich

$$I = I_c \cdot \sin \delta + \frac{\phi_0}{2\pi R} \dot{\delta} + \frac{\phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta}. \quad (30)$$

Mit der Plasmafrequenz $\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$ und den Parametern

$$\tau \equiv \omega_p t \quad \text{und} \quad \beta_J \equiv \frac{1}{\omega_p R C} \quad \text{sowie} \quad \alpha \equiv \frac{I}{I_c} \quad (31)$$

lässt sich die DGL in die dimensionslose Form

$$\alpha = \sin \delta + \beta_J \delta' + \delta'' \quad (32)$$

bringen, wobei ' die Ableitung nach τ bezeichnet. Diese DGL ist im allgemeinen Fall nicht analytisch lösbar. Um einen Einblick in die durch (32) beschriebene Dynamik zu erhalten betrachtet man zwei Grenzfälle:

- **Überdämpfte Kontakte.** Man betrachtet den Grenzfall verschwindender Kapazität, also $C \rightarrow 0$ und damit $\beta_J \rightarrow \infty$. Damit kann der Term δ'' vernachlässigt werden und man erhält die analytisch lösbare DGL

$$\alpha = \sin \delta + \beta_J \delta'. \quad (33)$$

Als Lösung findet man

$$\delta(\tau) = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}} \cdot \tan \left(\frac{\pi \tau}{T} \right) - \alpha \right] \quad (34)$$

mit der Periode $T = \frac{2\pi\beta_J}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$. Eine Mittelung liefert $\langle \delta' \rangle = \frac{2\pi}{T}$ und in Verbindung mit der 2. Josephson-Gleichung erhält man

$$\frac{\langle U \rangle}{RI_c} = \beta_J \langle \delta' \rangle = \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (35)$$

Für $I = I_c$ verschwindet also die mittlere Spannung $\langle U \rangle = 0$. Steigt der Strom aber über die maximale Josephson-Stromstärke I_c , fällt eine Spannung $\langle U \rangle \neq 0$ am Kontakt ab. Dies stimmt qualitativ mit dem zuvor erläuterten Verhalten eines Josephson-Kontaktes für $I > I_c$ überein.

Zur Charakterisierung von Josephson-Kontakten zieht man den *Stewart-McCumber-Parameter*

$$\beta_c \equiv \frac{1}{\beta_J^2} = (\omega_p RC)^2 \quad (36)$$

heran und definiert überdämpfte Kontakte als solche für die $\beta_c < 1$ gilt.

- **Unterdämpfte Kontakte.** Man betrachtet den Grenzfall dominierender Kapazität, also $C \rightarrow \infty$ und damit $\beta_J \rightarrow 0$ und definiert unterdämpfte Kontakte als solche für die $\beta_c > 1$ gilt. Die DGL ist in diesem Grenzfall nicht analytisch lösbar. Numerische Rechnungen zeigen, dass bei unterdämpften Kontakten ein hysteretisches Verhalten auftritt. Für $I > I_c$ springt die abfallende Spannung auf einen Wert $U > 0$ und nähert sich für $I \gg I_c$ asymptotisch der Normalleiter-Normalleiter Kennlinie um für $I \rightarrow 0$ der I-U-Kennlinie eines Supraleiter-Supraleiter Kontaktes zu folgen. Diese springt ab einer gewissen Spannung für $I < I_c$ zurück auf $U = 0$.

Die Hysterese lässt sich durch einen parallel geschalteten ohmschen Shuntwiderstand verhindern, da damit R und folglich β_c gesenkt werden können ($\beta_c < 1!$). Der in unserem Versuch verwendete Kontakt besitzt einen passenden Shuntwiderstand und ist daher hysteresefrei.

Zum Schluss wollen wir noch anmerken, dass man sich die durch das RCSJ-Modell beschriebene Dynamik (siehe Gleichung (32)) anhand eines mechanischen Analogons veranschaulichen kann. Zu diesem Zweck schreiben wir die DGL in der Form

$$\frac{\phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta} + \frac{\phi_0}{2\pi R} \dot{\delta} = I - I_c \cdot \sin \delta \quad (37)$$

und führen das (gekippte) Waschbrettpotential $U_J := \frac{\phi_0}{2\pi} (I_c(1 - \cos \delta) - I\delta)$ ein. Mit $I - I_c \cdot \sin \delta = -\frac{2\pi}{\phi_0} \text{grad}_\delta U_J$ folgt dann

$$\frac{\phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta} + \frac{\phi_0}{2\pi R} \dot{\delta} = -\frac{2\pi}{\phi_0} \text{grad}_\delta U_J \quad (38)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines reibungs- und massebehafteten Teilchens im gekippten Waschbrettpotential U_J , wobei die "Geschwindigkeit" $\dot{\delta}$ über die 2. Josephson-Gleichung mit der anliegenden Spannung U identifiziert werden kann. Weiterhin bestimmt die Kapazität C den Trägheitsterm und damit die Masse des Teilchens, während der Reibungskoeffizient mit dem ohmschen Widerstand verknüpft ist. Die (negative) Neigung des Waschbrettpotentials wird durch den fließenden Strom I festgelegt.

Man kann nun zeigen, dass für $I < I_c$ die lokalen Minima des Waschbrett-potentials erhalten bleiben. In diesem Fall wird die Bewegung durch eine Oszillation von δ um ein lokales Minimum beschrieben was zu einer verschwindenden mittleren Geschwindigkeit und damit zu $\langle U \rangle = 0$ führt. Für $I > I_c$ wird das Potential so weit gekippt, dass die lokalen Minima verschwinden – das Teilchen “rutscht” nun, gebremst durch die Reibung, den Potentialhang hinunter und erhält eine nicht verschwindende mittlere Geschwindigkeit. Im Rahmen unserer Analogie beobachten wir am Kontakt also eine mittlere Spannung $\langle U \rangle \neq 0$.

Für einen Kontakt ohne Shuntwiderstand ($R \rightarrow \infty$) verschwindet der Reibungsterm. Man stelle sich nun vor, das Teilchen bewege sich das Potential hinunter ($I > I_c$) und der Strom wird unter I_c abgesenkt. Das Potential wird also soweit gen Horizontale geneigt, dass es wieder lokale Minima gibt. Auf Grund der Trägheit des Teilchens und der fehlenden Reibung wird dieses dennoch weiter in die vorherige Richtung driften und eine nicht verschwindende mittlere Geschwindigkeit aufweisen. In unserem System beobachten wir also auch nach dem Absenken von I unter I_c noch eine Spannung $\langle U \rangle \neq 0$. Dies ist die Hysterese.

1.2.4 Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit des Josephson-Stromes

Der maximale Josephson-Strom I_c ist sowohl abhängig von der Temperatur als auch vom magnetischen Fluss, der den Kontakt durchsetzt. Dies soll im Folgenden kurz erläutert werden.

Temperaturabhängigkeit Der maximale Josephson-Strom I_c ist, wie die Bandlücke, temperaturabhängig. Diese Abhängigkeit lässt sich für einen Kontakt zwei identischer Supraleiter (gleiche Bandlücke) mit der BCS-Theorie zu

$$I_c(T) = \frac{\pi}{2eR_n} \Delta(T) \cdot \tanh \left[\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right] \quad (39)$$

herleiten. Hierbei ist $\Delta(T)$ die temperaturabhängige Bandlücke und R_n der Tunnelwiderstand des Kontaktes im normalleitenden Fall. Man findet sofort für die Grenzfälle

$$I_c(T \rightarrow 0) = \frac{\pi}{2eR_n} \Delta(0) \quad \text{und} \quad (40)$$

$$I_c(T \rightarrow T_c) = 0 \quad \text{da} \quad \Delta(T_c) = 0. \quad (41)$$

Der exakte Verlauf ist in Abb. 11 als gestrichelte Linie dargestellt.

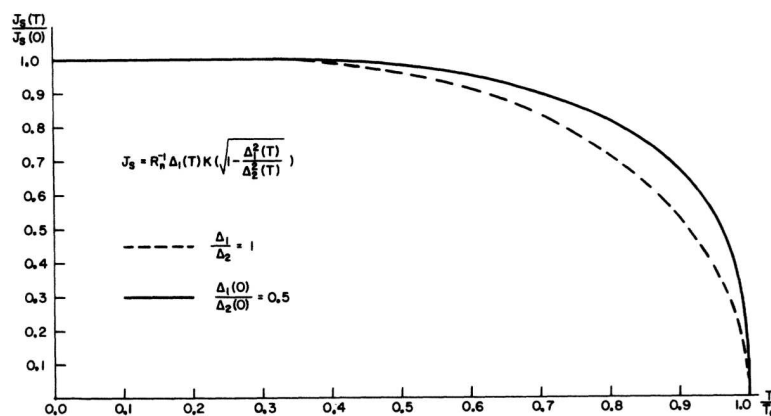


ABBILDUNG 11 : Abhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes I_c von der Temperatur, aus [3]. Die gestrichelte Linie stellt dabei die für uns relevante Abhängigkeit eines Kontaktes mit zwei gleichen Supraleitern dar. Der durchgezogene Graph beschreibt die Abhängigkeit für einen Kontakt mit einem Bandlückenverhältnis von $\Delta_1(0)/\Delta_2(0) = 0.5$ für die verwendeten Supraleiter 1 und 2. Der Übersichtlichkeit halber wurde der maximale Josephson-Strom $I_c(T)$ auf $I_c(0)$ und die Temperatur T auf T_c normiert.

Magnetfeldabhängigkeit Man stelle sich vor, die Normale auf die Kontaktfläche zwischen Supraleiter 1 und 2 zeige in z -Richtung. Die Kontaktfläche besitze eine Breite a in x - und b in y -Richtung. Weiterhin durchsetze ein Magnetfeld $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_y$ den Tunnelkontakt parallel zur Kontaktfläche. Besitzt die Kontaktfläche eine Dicke D und dringt das Magnetfeld um λ_L in den Supraleiter ein (London'sche Eindringtiefe), so bezeichnet man mit $d = 2\lambda_L + D$ die *effektive Dicke* der Barriere.

Im Rahmen der Ginsburg-Landau-Theorie lässt sich dann zeigen, dass für den Gradienten der Phasendifferenz in x -Richtung gilt

$$\partial_x \delta = \frac{2\pi}{\phi_0} B d \quad (42)$$

und damit für die Phase selbst

$$\delta(x) = \frac{2\pi}{\phi_0} B d \cdot x + \delta_0. \quad (43)$$

Eingesetzt in die 1. Josephson-Gleichung für die Suprastromdichte j_s ergibt

$$j_s(x) = j_c \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{\phi_0} B d \cdot x + \delta_0 \right]. \quad (44)$$

Die Tunnelstromdichte oszilliert also in x -Richtung mit einer von der magnetischen Flussdichte abhängigen Periode. Um den gesamten durch den Kontakt fließenden Tunnelstrom zu erhalten integrieren wir die Stromdichte über die Kontaktfläche. Es folgt

$$I_s(B) = \int_0^a dx \int_0^b dy j_s(x) = j_c \cdot ab \cdot \sin[\theta(B)] \cdot \frac{\sin \left[\frac{da\pi}{\phi_0} \cdot B \right]}{\frac{da\pi}{\phi_0} \cdot B} \quad (45)$$

$$= j_c \cdot A \cdot \sin[\theta(B)] \cdot \text{sinc} \left[\frac{\phi(B)}{\phi_0} \right] \quad (46)$$

mit $\theta(B) = \delta_0 + \frac{\phi(B)}{\phi_0} \pi$ und $\phi(B) = B \cdot da$ dem den Kontakt durchsetzenden Fluss sowie der Kontaktfläche $A = ab$. Experimentell werden I_s und B (also auch $\phi(B)$) vorgegeben. Folglich muss sich die Phase δ_0 in $\theta(B)$ so einstellen, dass Gleichung (45) erfüllt ist. Stellen wir jeweils den maximalen Josephson-Strom ein, muss $\sin[\theta(B)] = \pm 1$ gelten.

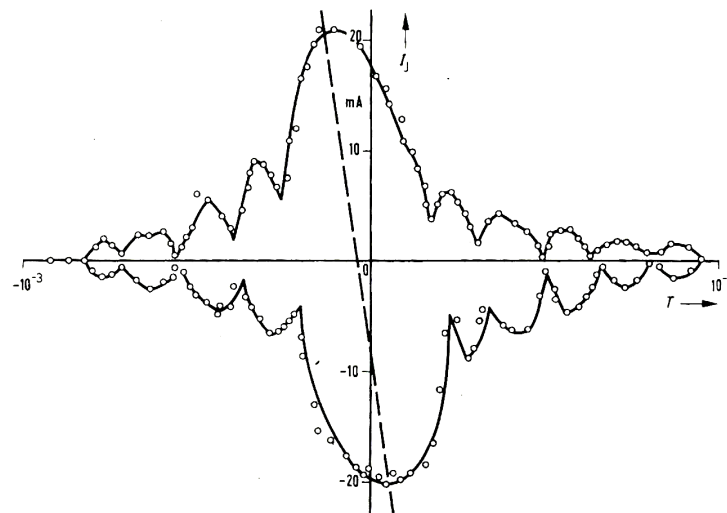


ABBILDUNG 12 : Messkurve des maximalen Josephson-Stromes I_s in Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld B , aus [4]. Die "Beugungsminima" treten immer für ganzzahlige Vielfache des magnetischen Flussquants auf. Die Neigung des Beugungsmusters ist auf den Einfluss des Eigenfeldes der das Magnetfeld abschirmenden Suprastrome an der Barriere zurückzuführen.

Wir erhalten dann die aus der Optik bekannte Spaltbeugungsfunktion für den Betrag des maximalen Josephson-Stromes

$$I_c(B) = I_c(0) \cdot \left| \operatorname{sinc} \left[\frac{\phi(B)}{\phi_0} \right] \right| \quad (47)$$

mit $I_c(0) = j_c A$ und $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Die sinc-Funktion verschwindet für $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, hier also für $\phi(B) = n\phi_0$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Physikalisch bedeutet dies, dass für ganzzahlige Vielfache des Flussquants der von Cooper-Paaren getragene Tunnelstrom versiegt. Eine mögliche Messkurve des Tunnelstromes in Abhängigkeit vom Magnetfeld ist in Abb. 12 dargestellt.

Das Magnetfeld dringt nur bis zu λ_L in den Supraleiter ein. Die hierfür verantwortlichen Supraströme in den Supraleitern erzeugen ihrerseits ein Magnetfeld, welche in obigen Betrachtungen ignoriert wurden. Der Einfluss dieses *Eigenfeldes* führt zu einem Kippen des durch Gleichung (47) vorhergesagten Beugungsmusters (siehe Abb. 12). Um den Einfluss dieser Störung abschätzen zu können, führt man die *Josephson-Eindringtiefe*

$$\lambda_J = \lambda_J(j_c, \lambda_L) \equiv \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d}} \quad (48)$$

ein. Diese beschreibt die charakteristische Länge, mit der die Supraströme vom Rand des Kontaktes her in die Barriere eindringen. Ist $\lambda_J > a$ (a : Breite des Kontaktes orthogonal zum Magnetfeld), kann der Einfluss des Eigenfeldes vernachlässigt werden. Für $\lambda_J < a$ hingegen schirmen die Supraströme das von außen angelegte Magnetfeld teilweise ab und beeinflussen so die Abhängigkeit vom Magnetfeld durch das oben beschriebene Kippen der Kurve.

Ist die Geometrie des Kontaktes bekannt und sind weiterhin $I_c(0)$ sowie λ_L zugänglich, lässt sich die Josephson-Eindringtiefe berechnen.

1.3 Experimentelle Grundlagen

Im folgenden Abschnitt sollen einige ausgewählte Sachverhalte, die den Versuchsaufbau betreffen, näher erläutert werden. Im Speziellen wird die Erzeugung und Kontrolle von tiefen Temperaturen, Vakua und Magnetfeldern behandelt.

1.3.1 Kryotechnik

Die Kryotechnik ist das Handwerkszeug der Tieftemperaturphysik und beschäftigt sich mit der Erzeugung und Kontrolle tiefer Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts. In unserem Versuch muss der Josephsonkontakt unter die Sprungtemperatur von $\sim 9\text{ K}$ gekühlt werden. Dies geschieht in einem sog. *Badkryostaten* mit flüssigem Helium.

Badkryostat Eine Schemazeichnung des von uns verwendeten Badkryostaten ist in Abb. 14 (rechts) dargestellt. Der Kryostat selbst ist aus verspiegeltem Spezialglas gefertigt und in mehrere zylindrische Kammern aufgeteilt. Die äußere Kammer wird über ein Magnetventil automatisch mit flüssigem Stickstoff befüllt um die eindringende Umgebungswärme abzufangen (der dadurch verdampfende Stickstoff entweicht in die Umgebung). Zwischen dem inneren Zylinder und dem Stickstoff-Schild befindet sich ein mit Hilfe einer Drehschieberpumpe (s.u.) evakuierter Bereich (Isolationsvakuum). Dieser unterbindet den diffusiven und konvektiven Wärmetransport, die verspiegelten Wände reduzieren zudem die Übertragung von Wärme durch elektromagnetische Strahlung.

Im innersten Zylinder befindet sich das manuell eingefüllte flüssige ^4He unter Normaldruck ($T \approx 4.2\text{ K}$). Der entweichende Heliumdampf wird in das Heliumrückgewinnungssystem eingespeist. Die Probe selbst befindet sich in einem Kupfercontainment im flüssigen Helium.

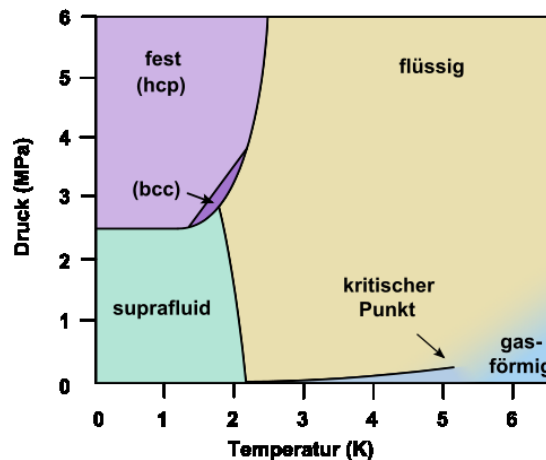


ABBILDUNG 13 : Phasendiagramm von ${}^4\text{He}$, aus [5]. Die Linie zwischen der flüssigen und der suprafluiden Phase trifft bei ca. $T_\lambda = 2.17\text{ K}$ auf die Temperatur-Achse. Diese Temperatur wird als *Lambdapunkt* bezeichnet und markiert den Phasenübergang von fluidem Helium in die suprafluide Phase.

Kryogene Gase Die von der Tieftemperaturphysik am häufigsten eingesetzten Gase sind Stickstoff und Helium (${}^4\text{He}$, seltener ${}^3\text{He}$). Beide sind inert und ungiftig und bei hinreichend tiefen Temperaturen farblose Flüssigkeiten. Trotz der *chemischen* Ungefährlichkeit dieser Kühlmittel dürfen die *physikalischen* Risiken tiefkalter Flüssigkeiten nicht unterschätzt werden (Verbrennungen der Haut). Unter Normaldruck besitzt flüssiger Stickstoff eine Temperatur von $T(\text{N}_2) = 77.36\text{ K}$. Für flüssiges Helium findet man $T({}^4\text{He}) = 4.22\text{ K}$.

Das Phasendiagramm von ${}^4\text{He}$ in Abb. 13 offenbart einen Phasentübergang für Temperaturen unterhalb von ca. 2 K (bei einem Druck von 5 kPa am *Lambdapunkt* $T_\lambda = 2.17\text{ K}$). Diese Temperaturen sind mit flüssigem Helium in einem Badkryostaten zu erreichen, wenn der Dampfdruck entsprechend gesenkt wird (Verdampfungskühlung). Suprafluides Helium ist wie die Supraleitung als ein makroskopischer Quantenzustand zu interpretieren. Während bei der Supraleitung die bosonischen Cooperpaare in einen gemeinsamen Grundzustand kondensieren, geschieht dies beim Übergang in die suprafluide Phase mit den Helium-Atomen selbst (${}^4\text{He}$ ist ein Boson). Suprafluides Helium hat einige erstaunliche Eigenschaften. So divergiert die Wärmeleitfähigkeit im Rahmen der heutigen Messgenauigkeit. Folglich siedet suprafluides Helium nicht mehr, da die gesamte Wärme in Form verdampfender Teilchen über die Oberfläche abgeführt werden kann. Gleichzeitig verschwindet die Viskosität vollständig. Dies führt zu einer uneingeschränkten Dominanz adhäsiver Kräfte und damit zum sog. *Onnes-Effekt*: Suprafluides Helium benetzt jede Fläche und “kriecht” die Wände eines Gefäßes hoch. Damit ist das “Einsperren” von suprafluidem Helium in offene Gefäße kaum möglich. Weitere Effekte betreffen hydrodynamische Wirbel (sog. *Vortices*), die – wie im Fall der Flussquantisierung beim Supraleiter – nur noch quantisiert auftreten und zudem hexagonale Gitterstrukturen bilden. Die Parallelen zwischen Supraleitung und Suprafluidität sind kaum zu übersehen.

Da wir in unserem Versuch das flüssige Helium unter Normaldruck vorhalten, erreichen wir den *Lambdapunkt* nicht.

1.3.2 Vakuumerzeugung mit Drehschieberpumpen

Das flüssige Helium muss möglichst effektiv isolieren werden, um den Verbrauch auf ein Minimum zu reduzieren. Zu diesem Zweck wird der Kern des Badkryostaten durch ein Isolationsvakuum vom äußeren Stickstoff-Schild getrennt. Dieses wird von einer Drehschieberpumpe erzeugt, die Vakua bis zu $\sim 10^{-2}$ mbar erreichen kann.

Drehschieberpumpen sind ein Standardwerkzeug der Technik und werden wegen ihres einfachen Aufbaus in vielen Bereichen eingesetzt. In der Vakuumtechnik kommen sie als Vorpumpen zur

Erzeugung eines Feinvakuums zum Einsatz. Abb. 14 zeigt links den schematischen Aufbau einer Drehschieberpumpe. Die exzentrische Lagerung des Rotors (2) bezüglich der Achse des Stators (1)

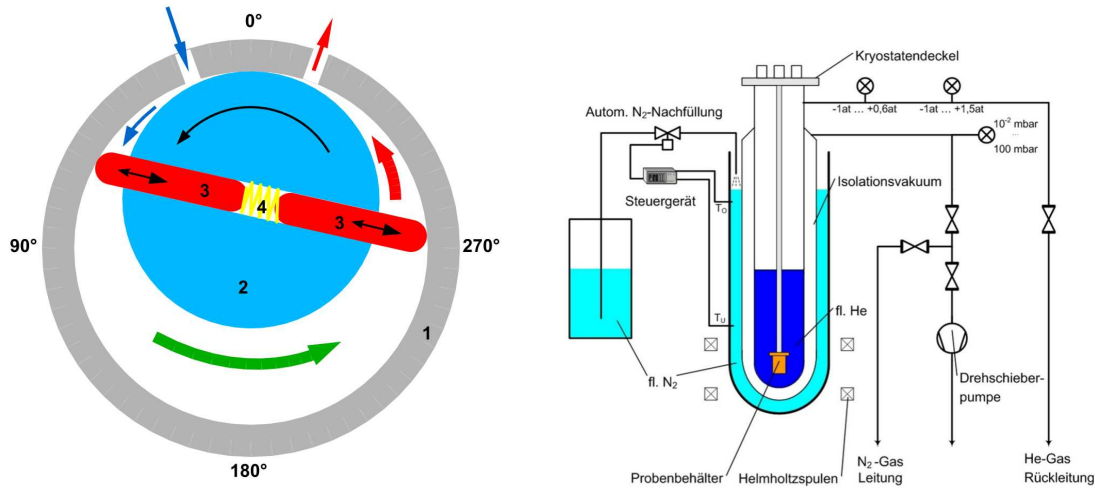


ABBILDUNG 14 : **Links:** Schematischer Aufbau einer Drehschieberpumpe, aus [6]. **Rechts:** Schematischer Aufbau des verwendeten Badkryostaten, aus [7]. Die Befüllung des Stickstoff-Schildes erfolgt vollautomatisch über einen Regelkreis. Die innere Kammer wird manuell mit flüssigem Helium befüllt. Das Isolationsvakuum wird mit Hilfe einer Drehschieberpumpe erzeugt.

führt in Verbindung mit den beweglich gelagerten Schiebern (3) zu zwei von einander getrennten Kammern, von denen jeweils eine mit dem Einlass und eine mit dem Auslass verbunden ist. Bei Rotation des Rotors wird sukzessive Gas aus dem Reservoir am Einlass entnommen und dem Reservoir am Auslass zugeführt. Dieses Prinzip ermöglicht sowohl das Pumpen gasförmiger als auch flüssiger Stoffe.

1.3.3 Magnetfelderzeugung mit Helmholtz-Spulen

Sowohl für die Erdfeldkompensation¹ als auch für die Magnetfelderzeugung am Ort der Probe werden in unserem Versuch *Helmholtzspulen* verwendet. Diese finden immer dann Anwendung, wenn ein möglichst *homogenes* und zugleich steuerbares Magnetfeld benötigt wird. Wie in Abb. 15 (links) dargestellt besteht eine Helmholtzanordnung aus zwei schmalen Spulen mit Radius R die im Abstand R voneinander fixiert werden. Im Zentrum auf der Symmetrieachse wird so in einem begrenzten Bereich ein nahezu homogenes Magnetfeld erzeugt, siehe Abb. 15 (rechts).

“Nahezu” bedeutet hier “bis in zweite Ordnung”. Berechnet man mit Hilfe des BIOT-SAVART-GESETZES das Magnetfeld auf der Symmetrieachse als Funktion von x , so stellt man fest, dass für die oben beschriebene Geometrie (identischer Abstand und Radius der Spulen) sowohl die erste als auch die zweite Ableitung der magnetischen Flussdichte nach x verschwinden. Im Zentrum der Anordnung ist das Magnetfeld also krümmungsfrei.

Für das Magnetfeld auf der Symmetrieachse liefert eine einfache Integration über den Strom der Spulen mit $x = \frac{R}{2}$ (Mitte zwischen beiden Spulen)

$$\mathbf{B}(I) = \frac{\mu_0 I N R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{8\mu_0}{\sqrt{125}} \cdot \frac{I N}{R} \cdot \mathbf{e}_x \quad (49)$$

mit dem Spulenstrom I , der Windungszahl N , dem Spulenradius und -abstand R , der magnetischen Feldkonstanten μ_0 und dem Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse \mathbf{e}_x . Dieser Zusammenhang erlaubt es bei bekannten Spulenparametern das applizierte Magnetfeld aus dem gemessenen Spulenstrom zu berechnen.

¹Es ist ein Feld von $B_E \approx 48 \mu\text{T}$ mit einer Inklination (Winkel gegen die Horizontale) von $\varphi_I \approx 60^\circ$ zu kompensieren.

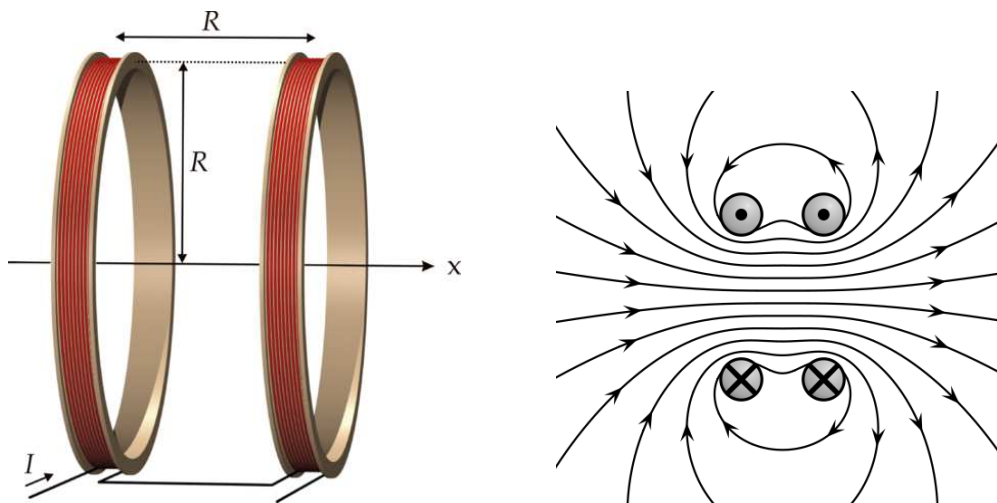


ABBILDUNG 15 : **Links:** Schematischer Aufbau eines Helmholtz-Spulenpaares, aus [8]. **Rechts:** Qualitativer Verlauf der Feldlinien im Querschnitt durch eine Helmholtzanordnung, aus [8]. Man erkennt im Zentrum das näherungsweise homogene Magnetfeld.

2 Auswertung

2.1 I-U-Charakteristik des DC-Josephson-Effekts

Versuchsdurchführung Der von uns verwendete Versuchsaufbau besteht aus dem in den Grundlagen beschriebenen Badkryostaten (siehe Abb. 14 (rechts)), in den der Probenstab mit dem Josephson-Kontakt an der Spitze eingelassen wird und zum anderen aus der Messeinrichtung, die in Abb. 16 schematisch dargestellt ist. Dieser Versuchsaufbau ist die Grundlage aller in den nächsten drei Kapiteln beschriebenen Messreihen.

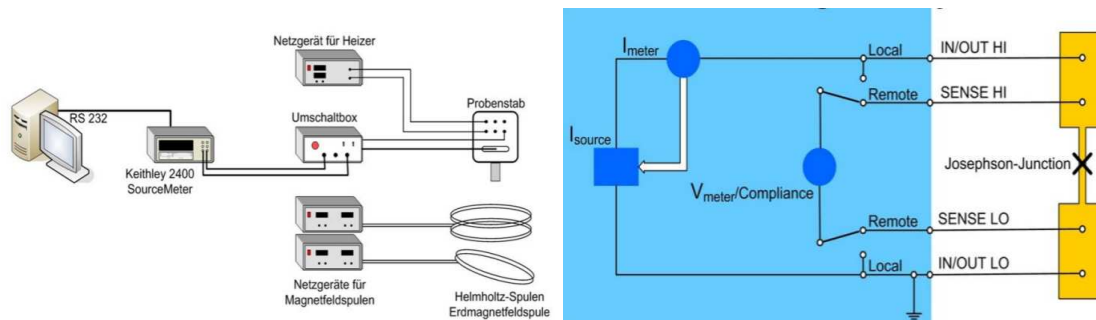


ABBILDUNG 16 : **Links:** Schematischer Aufbau der Messeinrichtung, aus [7]. Der Strom durch den Josephson-Kontakt wird mittels digitalem Strommessgerät an die Software auf dem PC weitergegeben. Eine externe Spannungsquelle erlaubt es den Kontakt zu heizen. Zwei getrennte Helmholtz-Anordnungen erlauben zum einen die Kompensation des Erdmagnetfeldes und zum anderen das kontrollierte Anlegen eines externen Magnetfeldes. **Rechts:** Beschaltung des Josephson-Kontaktes zur Strom- und Spannungsmessung mit dem Keithley 2400 SourceMeter, aus [7].

Zu Beginn wird das Netzgerät für die Erdfeldkompensation auf $I_{\text{comp}} \approx 460 \text{ mA}$ eingestellt. Die zugehörige Helmholtzspule ist der Inklination in Stuttgart entsprechend ausgerichtet und erzeugt im Badkryostaten einen weitgehend feldfreien Raum. Der über die Drehschieberpumpe vakuumisolierte Badkryostat wird mit flüssigem Stickstoff und anschließend im Kern mit flüssigem Helium befüllt. Der Füllstand des Stickstoff-Schildes wird automatisch gemessen und gegebenenfalls korrigiert. Mit Hilfe des PCs und der Umschaltbox wird das Keithley 2400 SourceMeter mit dem im Probenraum angebrachten Temperatursensor verbunden und ausgelesen. Ausgegeben wird der

Widerstand des Temperatursensors, der mittels Eich-tabelle in die entsprechende Temperatur umgerechnet wird.

In diesem ersten Versuchsabschnitt soll eine vollständige I-U-Kennlinie des verwendeten Josephson-Kontaktes aufgenommen werden (d.h. bis $|U| > 2\Delta/e$). Zu diesem Zweck wird mit der Umschaltbox der Josephson-Kontakt mit dem **Keithley 2400 SourceMeter** verbunden. Die Messung der I-U-Charakteristik erfolgt automatisch über die Steuer-Software gemäß der von uns vorgegebenen Strom-Messpunkte. Wir führen drei Messreihen durch:

1. **Messreihe 1:** Die abfallende Spannung U wird für I_s im Intervall $[-0.99, 0.99]$ mA in 0.01 mA-Schritten gemessen um eine Übersicht zu erhalten.
2. **Messreihe 2:** Die abfallende Spannung U wird für I_s im Intervall $[0.99, -0.99]$ mA in 0.01 mA-Schritten gemessen um das hysteretische Verhalten zu untersuchen.
3. **Messreihe 3:** Die abfallende Spannung U wird für I_s in den Intervallen $[-0.99, -0.5]$ mA, $[-0.1, 0.1]$ mA und $[0.5, 0.99]$ mA in 0.001 mA-Schritten und in den komplementären Intervallen in 0.01 mA-Schritten gemessen um die charakteristischen Größen ablesen zu können.

Mit Hilfe von Messreihe 3 bestimmen wir den maximalen Josephson-Strom I_c , die Energielücke 2Δ sowie die Widerstände des Kontaktes R_n und des Shuntwiderstandes R_s bei der gegebenen Temperatur. Aus diesen Parametern berechnen wir den Stewart-McCumber-Parameter β_c des verwendeten Josephson-Kontaktes.

2.1.1 Hysterese & Shuntwiderstand

Messreihe 1 ist in Abb. 17 (oben) dargestellt. Der Strom wurde hier von negativen zu positiven Werten durchfahren. Man erkennt bei $U = 0$ den spannungslosen Josephson-Strom. Erreicht man $I = I_c$ bricht das Cooper-Paar Tunneln zusammen und die Kurve springt auf eine ohmsche Kennlinie mit $U > 0$. Für Spannungen $|U| \approx 2.9$ mV beobachtet man einen weiteren Knick in der Kennlinie. Nach diesem handelt es sich offensichtlich wieder um eine ohmsche Charakteristik mit einer etwas größeren Steigung (also geringerem Widerstand).

Diese Struktur deutet auf einen parallel zum Tunnelkontakt geschalteten Shuntwiderstand hin. Übersteigt der Strom den maximalen Josephson-Strom findet kein Cooper-Paar Tunneln mehr statt. Stattdessen fließt ein Einzelelektronenstrom über den Shuntwiderstand. Dessen Widerstand bestimmt die Steigung des ersten ohmschen Abschnittes. Ist die Spannung groß genug ($U \geq 2\Delta/e$) können die Cooper-Paare am Tunnelkontakt aufgebrochen werden und es setzt ein Einzelelektronentunneln durch die Barriere ein. Für größere Spannungen entspricht die I-U-Kennlinie daher der Normalleitercharakteristik, wobei die Steigung durch die parallel geschalteten Widerstände R_n des Normalleiterkontaktes und R_s des Shuntwiderstandes gegeben ist.

In Abb. 17 (unten) sind die Messreihen 1 und 2 dargestellt. Da Messreihe 2 invers zur Messreihe 1 durchlaufen wurde, müssten spätestens hier hysteretische Effekte zu erkennen sein². Der untersuchte Kontakt ist demnach hysterese-frei. Dies korrespondiert mit der Erkenntnis, dass er mit einem Shuntwiderstand versehen ist. Dieser reduziert den Stewart-McCumber-Parameter unter die kritische Marke von 1 und führt zu einem nicht-hysteretischen, überdämpften Kontakt. Wir werden β_c weiter unten berechnen.

2.1.2 Maximaler Josephson-Strom

Wir beschreiben im Folgenden ausführlich das Verfahren zur Bestimmung des maximalen Josephson-Stromes und einer entsprechenden Fehlerabschätzung. Die Bestimmung von I_c in den folgenden Kapiteln erfolgt analog und wird dort nicht mehr näher beschrieben.

In Abb. 18 (oben) ist Messreihe 3 aufgetragen. Man erkennt die von uns höher gewählte Stromauflösung in den kritischen Bereichen an den dichter liegenden Messpunkten. In Abb. 18 (unten)

²Auf Grund der Symmetrie lässt sich die Hysterese eines unterdämpften Josephson-Kontaktes schon mit Messreihe 1 alleine ausschließen.

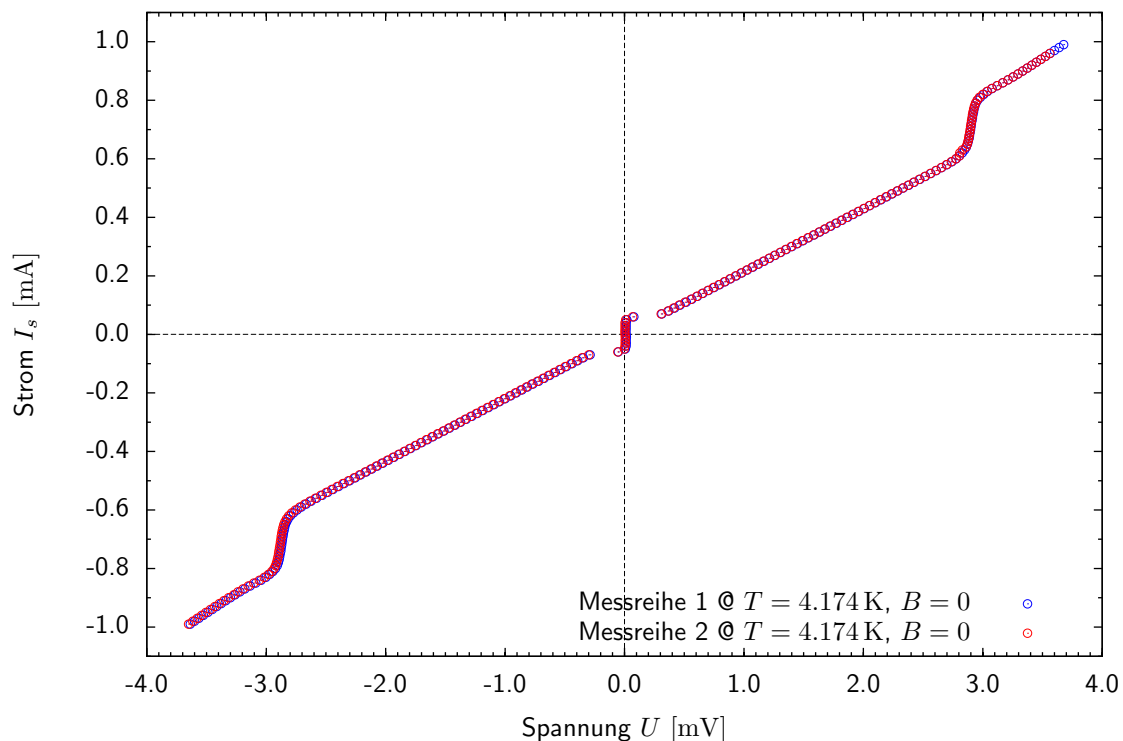
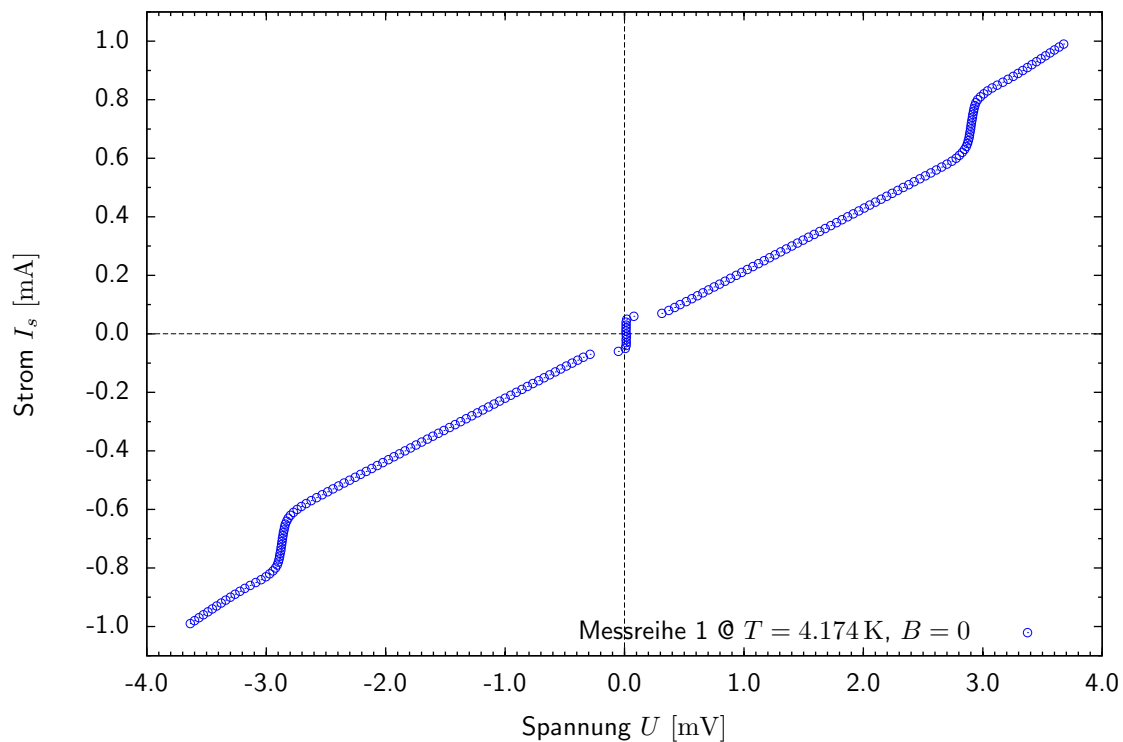


ABBILDUNG 17 : **Oben:** Übersichtsmessung der I-U-Kennlinie. Man erkennt für $U = 0$ den spannungslosen Josephson-Strom. Die anschließende Steigung ist durch den Widerstand des Shunts gegeben. Bei einer Spannung von $U = 2\Delta/e$ setzt das Tunneln von Einzelelektronen ein und der Gesamtwiderstand fällt ab. **Unten:** Hier wurden die Messreihen 1 und 2 überlagert. Offensichtlich stimmen die I-U-Kennlinien für ansteigende und absteigende Messreihen überein. Der Josephson-Kontakt ist also hysteresefrei.

ist der Bereich um $U = 0$ vergrößert dargestellt. Offensichtlich werden die Messungen durch einen Spannungsoffset verfälscht, da wir den nahezu senkrechten Anstieg des Josephson-Stromes bei $U = 0$ erwarten. Für die Auswertung der Bandlücke weiter unten spielt dies aber keine Rolle, da wir die Symmetrie der Messkurve ausnutzen.

Um den spannungslosen maximalen Josephson-Strom I_c zu bestimmen fitten wir wie in Abb. 18 (unten) dargestellt 5 Geraden

$$\mathcal{F}_i(U) = a_i \cdot U + b_i \quad \text{mit } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (50)$$

an die Messpunkte. Diese werden gewählt wie folgt.

1. \mathcal{F}_1 wird an das negative Plateau vor dem senkrechten Anstieg gefittet.
2. \mathcal{F}_2 wird an den senkrechten Anstieg gefittet.
3. \mathcal{F}_3 wird an das positive Plateau nach dem senkrechten Anstieg gefittet.
4. \mathcal{F}_4 besitzt die selbe Steigung wie \mathcal{F}_1 und wird manuell soweit nach oben verschoben, bis der Schnitt mit den Messpunkten an der Stelle zu liegen kommt, an der der senkrechte Anstieg beginnt.
5. \mathcal{F}_5 besitzt die selbe Steigung wie \mathcal{F}_3 und wird manuell soweit nach unten verschoben, bis der Schnitt mit den Messpunkten an der Stelle zu liegen kommt, an der der senkrechte Anstieg endet.

Anschließend berechnen wir die y -Koordinate der Schnittpunkte der Geraden \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 ($= I(1, 2) \equiv I_{\max}^-$), \mathcal{F}_2 und \mathcal{F}_3 ($= I(2, 3) \equiv I_{\max}^+$), \mathcal{F}_4 und \mathcal{F}_2 ($= I(4, 2) \equiv I_{\min}^-$) sowie \mathcal{F}_5 und \mathcal{F}_2 ($= I(5, 2) \equiv I_{\min}^+$). Diese sind gegeben durch die einfache Beziehung

$$I(i, j) = \frac{a_i b_j - a_j b_i}{a_i - a_j}. \quad (51)$$

Wir benutzen die Punktsymmetrie der Messreihe und erhalten eine obere und eine untere Schranke für den maximalen Josephson-Strom

$$I_{c, \max} = \frac{1}{2} (I_{\max}^+ - I_{\max}^-) \quad (52)$$

$$I_{c, \min} = \frac{1}{2} (I_{\min}^+ - I_{\min}^-) \quad (53)$$

wobei $I_{c, \min} \leq I_c \leq I_{c, \max}$. Da keine weiteren Anhaltspunkte für die exakte Lage von I_c vorliegen, wählen wir den Mittelwert

$$I_c = \frac{1}{2} (I_{c, \max} + I_{c, \min}) \quad (54)$$

und für die Abschätzung des Fehlers den Abstand des Letzteren zu den zuvor berechneten Schranken

$$\Delta I_c = \frac{1}{2} (I_{c, \max} - I_{c, \min}) . \quad (55)$$

Mit den Fitparametern der in Abb. 18 (unten) dargestellten Geraden erhalten wir die Werte

$$\begin{aligned} I_{\max}^- &= -0.0599 \text{ mA} \\ I_{\min}^- &= -0.0484 \text{ mA} \\ I_{\max}^+ &= 0.0593 \text{ mA} \\ I_{\min}^+ &= 0.0495 \text{ mA} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} I_{c, \max} &= 0.0596 \text{ mA} \\ I_{c, \min} &= 0.0490 \text{ mA} . \end{aligned}$$

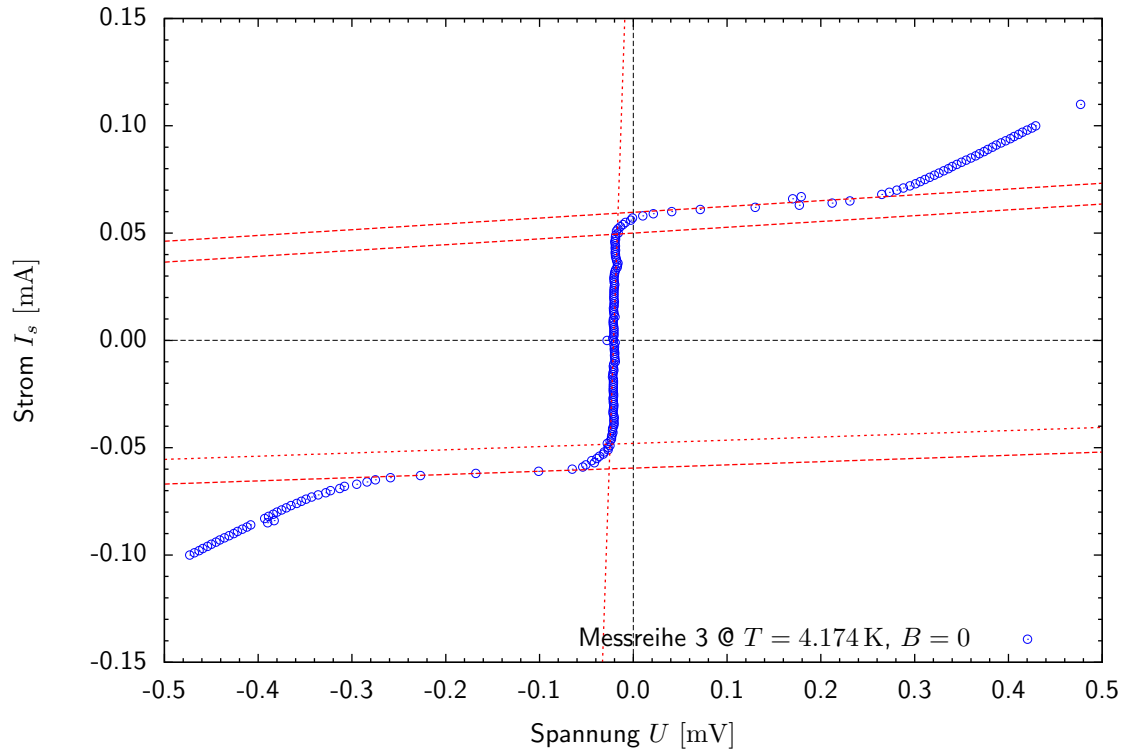
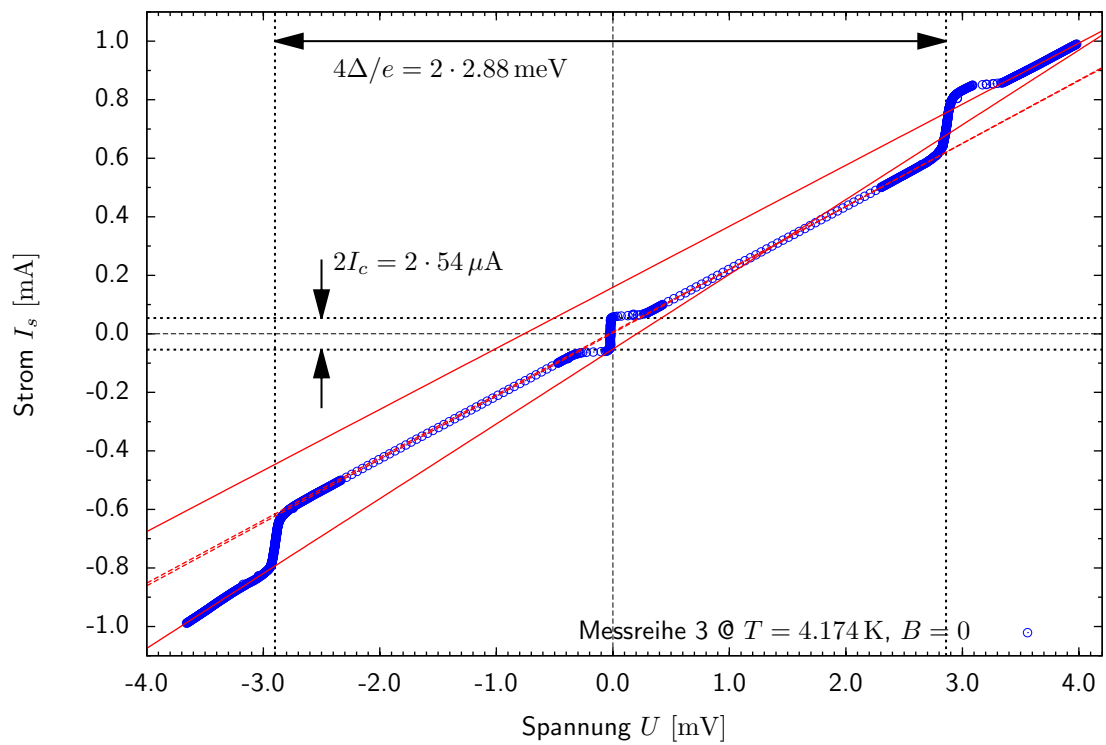


ABBILDUNG 18 : **Oben:** Messreihe 3 mit hoher Auflösung in den kritischen Bereichen. Die Spannungsdifferenz zwischen den äußeren Stufen entspricht gerade $4\Delta/e$, die Stromdifferenz der zentralen Stufe hingegen $2I_c$. **Unten:** Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich des spannungslosen Josephson-Stromes. Der maximale Josephson-Strom wird über die y -Koordinaten der Schnittpunkte der eingezeichneten Fit-Geraden bestimmt. Man erkennt einen Spannungsoffset, der wegen der Symmetrie nicht berücksichtigt werden muss.

Der maximale Josephson-Strom ergibt sich zu

$$I_c = 0.0543 \text{ mA}$$

und der Fehler ist

$$\Delta I_c = 0.0053 \text{ mA}.$$

Wir erhalten also für den von uns untersuchten Josephson-Kontakt bei $T = 4.174 \text{ K}$ und verschwindendem Magnetfeld einen maximalen Josephson-Strom von

$$I_c = (54 \pm 6) \mu\text{A}. \quad (56)$$

2.1.3 Bandlücke

Wir beschreiben im Folgenden ausführlich das Verfahren zur Bestimmung der Bandlücke und einer entsprechenden Fehlerabschätzung. Die Bestimmung von 2Δ in den folgenden Kapiteln erfolgt analog und wird dort nicht mehr näher beschrieben.

In Abb. 19 sind die Knickpunkte der I-U-Kennlinie aus Messreihe 3 im positiven (oben) und negativen (unten) Bereich vergrößert dargestellt. Um die Spannung $U_c = 2\Delta/e$ zu bestimmen fitten wir wie in Abb. 19 dargestellt an beide Knickpunkte je 3 Geraden

$$\mathcal{F}_i^\pm(U) = a_i^\pm \cdot U + b_i^\pm \quad \text{mit } i \in \{1, 2, 3\} \quad (57)$$

wobei \pm den Knick im positiven/negativen Bereich kennzeichnet. Diese werden gewählt wie folgt.

1. \mathcal{F}_1^\pm wird an den ohmschen Bereich links des Knickes gefittet.
2. \mathcal{F}_2^\pm wird an die steile Flanke des Knickes selbst gefittet.
3. \mathcal{F}_3^\pm wird an den ohmschen Bereich rechts des Knickes gefittet.

Anschließend berechnen wir die x -Koordinate der Schnittpunkte der Geraden \mathcal{F}_1^- und \mathcal{F}_2^- ($= U^-(1, 2) \equiv U_{\max}^-$), \mathcal{F}_2^- und \mathcal{F}_3^- ($= U^-(2, 3) \equiv U_{\min}^-$), \mathcal{F}_1^+ und \mathcal{F}_2^+ ($= U^+(1, 2) \equiv U_{\min}^+$) sowie \mathcal{F}_2^+ und \mathcal{F}_3^+ ($= U^+(2, 3) \equiv U_{\max}^+$). Diese sind gegeben durch die einfache Beziehung

$$U^\pm(i, j) = \frac{b_j^\pm - b_i^\pm}{a_i^\pm - a_j^\pm}. \quad (58)$$

Wir benutzen die Punktsymmetrie³ der Messreihe und erhalten eine obere und eine untere Schranke für die Spannung U_c

$$U_{c,\max} = \frac{1}{2} (U_{\max}^+ - U_{\max}^-) \quad (59)$$

$$U_{c,\min} = \frac{1}{2} (U_{\min}^+ - U_{\min}^-) \quad (60)$$

wobei $U_{c,\min} \leq U_c \leq U_{c,\max}$. Da keine weiteren Anhaltspunkte für die exakte Lage von U_c vorliegen, wählen wir auch hier den Mittelwert

$$U_c = \frac{1}{2} (U_{c,\max} + U_{c,\min}) \quad (61)$$

und für die Abschätzung des Fehlers den Abstand des Letzteren zu den zuvor berechneten Schranken

$$\Delta U_c = \frac{1}{2} (U_{c,\max} - U_{c,\min}). \quad (62)$$

Wir geben die Energielücke 2Δ in meV an, denn es gilt

$$2\Delta = U_c e \quad (63)$$

³Nehmen wir diese Symmetrie an, fällt an dieser Stelle der zuvor erwähnte Spannungsoffset heraus.

und der errechnete Zahlenwert für U_c in mV lässt sich direkt als Energielücke in meV interpretieren. Mit den Fitparametern der in Abb. 19 dargestellten Geraden erhalten wir die Werte

$$\begin{aligned} U_{\max}^- &= -2.9352 \text{ mV} \\ U_{\min}^- &= -2.8590 \text{ mV} \\ U_{\max}^+ &= 2.9063 \text{ mV} \\ U_{\min}^+ &= 2.8225 \text{ mV} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} U_{c,\max} &= 2.9207 \text{ mV} \\ U_{c,\min} &= 2.8407 \text{ mV} . \end{aligned}$$

Die Energielücke ergibt sich zu

$$2\Delta = U_c e = 2.8807 \text{ meV}$$

und der Fehler ist

$$\Delta(2\Delta) = \Delta U_c e = 0.0400 \text{ meV} .$$

Wir erhalten also für den von uns untersuchten Josephson-Kontakt bei $T = 4.174 \text{ K}$ und verschwindendem Magnetfeld eine Energielücke von

$$2\Delta = (2.88 \pm 0.04) \text{ meV} . \quad (64)$$

2.1.4 Stewart-McCumber-Parameter

Im Folgenden bestimmen wir den Stewart-McCumber-Parameter und die charakteristischen Widerstände R_n und R_s des Josephson-Kontaktes. Hierfür wurden an Messreihe 3 in Abb. 18 (oben) Geraden

$$\mathcal{F}_i(U) = a_i \cdot U + b_i \quad \text{mit} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (65)$$

angefittet. Diese wurden wie folgt gewählt.

1. \mathcal{F}_1 approximiert die Messwerte im negativen Bereich für Ströme über den Shuntwiderstand *und* den Tunnelkontakt (durchgezogene Linie).
2. \mathcal{F}_2 approximiert die Messwerte im positiven Bereich für Ströme über den Shuntwiderstand *und* den Tunnelkontakt (durchgezogene Linie).
3. \mathcal{F}_3 approximiert die Messwerte im negativen Bereich für Ströme über den Shuntwiderstand (gestrichelte Linie).
4. \mathcal{F}_4 approximiert die Messwerte im positiven Bereich für Ströme über den Shuntwiderstand (gestrichelte Linie).

Da die Fits über Achsen skaliert in mA und mV erzeugt wurden, sind die Fitparameter a_i direkt als Leitfähigkeit in Ω^{-1} zu interpretieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} R_{\text{ges}}^{(1)} &= a_1^{-1} \pm a_1^{-2} \Delta a_1 = (3.9132 \pm 0.0111) \Omega \\ R_{\text{ges}}^{(2)} &= a_2^{-1} \pm a_2^{-2} \Delta a_2 = (4.7936 \pm 0.0056) \Omega \\ R_s^{(1)} &= a_3^{-1} \pm a_3^{-2} \Delta a_3 = (4.6301 \pm 0.0036) \Omega \\ R_s^{(2)} &= a_4^{-1} \pm a_4^{-2} \Delta a_4 = (4.6594 \pm 0.0015) \Omega \end{aligned}$$

mit den von **gnuplot** ausgegebenen asymptotischen Standardfehlern Δa_i und den Regeln der Fehlerfortpflanzung.

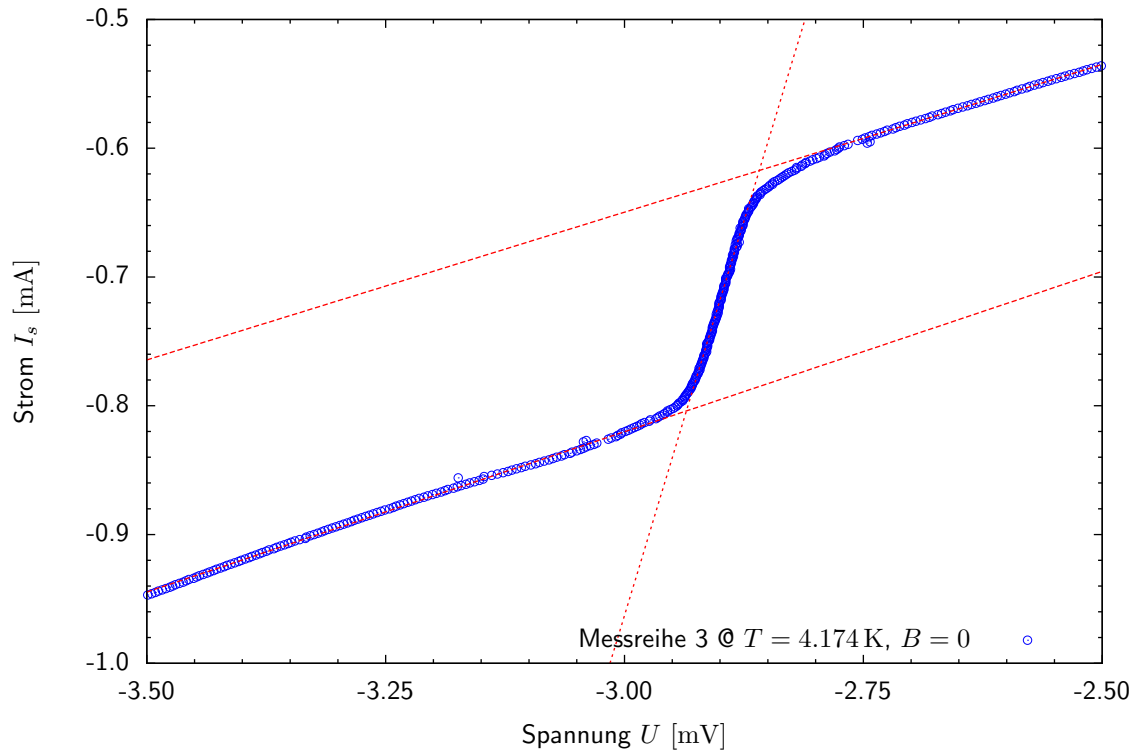
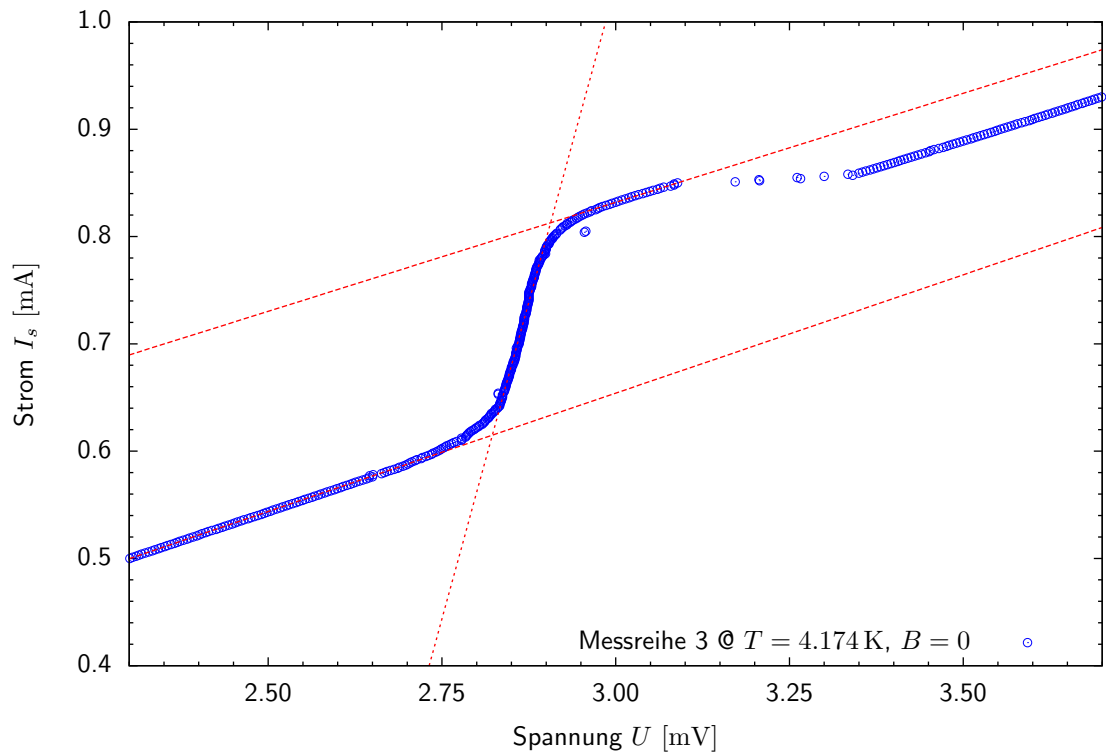


ABBILDUNG 19 : **Oben:** Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich $U \approx 2\Delta/e$. Die exakte Spannung $U = 2\Delta/e$ wird als Mittelwert der x -Werte der beiden Schnittpunkte der drei Fit-Geraden gewählt. Diese geben auch ein Maß für den Fehler an. **Unten:** Dieselbe Konstruktion für den Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich $U \approx -2\Delta/e$.

Wir bemerken hier zweierlei. Zum einen – und dies wird auch aus Abb. 18 oder 19 (oben) ersichtlich – wurde die Messung nach Überschreiten von $U = +2\Delta/e$ gestört. Dies kann durch das Umschalten des Messgerätes auf einen anderen Messbereich oder eine Störung der Stromversorgung verursacht worden sein. Jedenfalls widerspricht $R_{\text{ges}}^{(2)} > R_s^{(1,2)}$ der Theorie, da der Gesamtwiderstand bei zusätzlichem Normalleitertunneln *senken* muss. Wir vernachlässigen daher $R_{\text{ges}}^{(2)}$ und erhalten als Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = (3.91 \pm 0.02) \Omega. \quad (66)$$

In diesem Zusammenhang sei weiterhin darauf hingewiesen, dass die Angabe des asymptotischen Standardfehlers den wahren Fehler i.d.R. unterschätzt. Vorallem bei vielen, weit auseinanderliegenden Messpunkten wird der automatisch berechnete Standardfehler sehr klein und damit unrealistisch. Wir wählen daher für den Shuntwiderstand als Fehlerabschätzung

$$\Delta R_s \approx \left| R_s^{(1)} - R_s^{(2)} \right| \quad (67)$$

und als Wert den Mittelwert $R_s = \frac{1}{2}(R_s^{(1)} + R_s^{(2)}) = 4.6448 \Omega$. Damit folgt

$$R_s = (4.64 \pm 0.03) \Omega. \quad (68)$$

Um den Normalleiterwiderstand R_n des Tunnelkontaktes zu berechnen bemerken wir, dass dieser zusammen mit R_s zu R_{ges} parallel geschaltet ist. Also

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_n} \Leftrightarrow R_n = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_s}} \quad (69)$$

und wir erhalten $R_n = 24.8442 \Omega$. Der Fehler ergibt sich mittels Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta R_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta R_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta R_s}{R_s^2} = 1.6644 \Omega.$$

Also ergibt sich ein Normalleiterwiderstand von

$$R_n = (24.8 \pm 1.7) \Omega. \quad (70)$$

Für den Stewart-McCumber-Parameter erhalten wir mit der gegebenen Kapazität $C = 200$ fF

$$\beta_c = \omega_p^2 R_{\text{ges}}^2 C^2 = \frac{2eI_c C R_{\text{ges}}^2}{\hbar} = 0.5053$$

mit einem Fehler von

$$\Delta \beta_c = \frac{2eC R_{\text{ges}}^2}{\hbar} \cdot \Delta I_c + \frac{2eI_c C}{\hbar} \cdot 2R_{\text{ges}} \cdot \Delta R_{\text{ges}} = 0.0545.$$

Schlussendlich ergibt sich

$$\beta_c = (0.51 \pm 0.06) < 1. \quad (71)$$

Damit ist der Stewart-McCumber-Parameter deutlich kleiner als 1 und wir können auf einen hysteresefreien Kontakt schließen. Dieses Ergebnis ist konsistent mit der hysteresefreien I-U-Kennlinie in Abb. 17 (unten) und korreliert mit der zuvor geäußerten Vermutung, es handele sich um einen überdämpften Tunnelkontakt.

2.2 Temperaturabhängigkeit

Versuchsdurchführung Im folgenden Abschnitt soll die in den Grundlagen diskutierte Temperaturabhängigkeit der Bandlücke 2Δ und des maximalen Josephson-Stromes I_c experimentell verifiziert werden. Zu diesem Zweck werden bei unterschiedlichen Temperaturen vollständige I-U-Kennlinien aufgenommen, wie schon im ersten Teil beschrieben wurde. Kontrolliert wird die Temperatur des Tunnelkontaktes über einen Heizwiderstand auf der Wärmebrücke, die den Tunnelkontakt mit dem heliumgekühlten Kupfer-Containment verbindet. Am Kontakt befindet sich zudem ein Temperaturfühler, der über das **Keithley 2400 SourceMeter** mit dem PC ausgelesen werden kann. Die Temperatur lässt sich über die eingestellte Stromstärke des zugehörigen Netzgerätes (siehe Abb. 16 (links)) steuern ($I_{\text{Heiz}} \leq 50 \text{ mA}$).

Auf Grund technischer Probleme, die auch vom Assistenten nicht behoben werden konnten, waren wir nicht in der Lage die für die folgende Auswertung nötigen Daten selbst aufzunehmen. Wir greifen daher auf die Datensätze einer anderen Praktikumsgruppe zurück.

Für die Auswertung standen uns Messreihen bei den Temperaturen $T \in \{4.2, 5.4, 6.0, 6.5, 7.4, 8.0\} \text{ K}$ zur Verfügung (im Folgenden nummeriert von 1 bis 6 nach aufsteigenden Temperaturen). Diese Messreihen enthielten Daten im Stromintervall $[-0.08, 0.08] \text{ mA}$ in 0.002 mA -Schritten. Die Stromintervalle um $U = \pm 2\Delta/e$ sind nicht einheitlich und der aktuellen Lage des Knickes angepasst. Die Auflösung beträgt auch hier 0.002 mA .

2.2.1 Maximaler Josephson-Strom

Die Messreihen 1 bis 6 sind für einen Abschnitt um $U = 0$ in Abb. 20 dargestellt. Um die Temperaturabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes mit der Theorie vergleichen zu können, werten wir die Messreihen 1 bis 6 gemäß des zuvor beschriebenen Verfahrens aus um jeweils den maximalen Josephson-Strom und den zugehörigen Fehler zu bestimmen. Weiterhin nehmen wir für die Temperatur einen Fehler von $\Delta T = 0.1 \text{ K}$ an, da diese in den verwendeten Datensätzen nur auf 0.1 K genau angegeben war (der Temperatursensor selbst liefert eine deutlich höhere Auflösung). Damit ergeben sich die in Abb. 21 (oben) dargestellten maximalen Josephson-Ströme. Hier sei angemerkt, dass für die Messreihen 5 und 6 bei $T = 7.4 \text{ K}$ und $T = 8.0 \text{ K}$ eine Auswertung nach dem angewendeten Schema nicht mehr möglich war (siehe Abb. 20), da in den Datensätzen die Signatur eines spannungslosen Josephson-Stromes vollständig verschwunden war (kein Knick). Daher wurde für diese Messreihen $I_c = 0$ angenommen, was allerdings im Widerspruch zur Theorie steht, nach der der spannungslose Josephson-Strom erst für $T = T_c$ vollständig verschwinden sollte. Hier spielen offenkundig weitere Effekte eine Rolle, die mit den vorliegenden Daten nicht näher untersucht werden können. Wir geben die beiden Messpunkte (ohne Stromfehler) in Abb. 21 der Vollständigkeit halber an, ignorieren sie aber im Folgenden.

Für einen Vergleich mit der Theorie erinnern wir uns an die in den Grundlagen angegebene Gleichung (39) für den maximalen Josephson-Strom. Dividieren wir beide Seiten durch $I_c(0)$ erhalten wir eine Gleichung für den reduzierten Strom in Abhängigkeit von der reduzierten Bandlücke $\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ und der reduzierten Temperatur $\frac{T}{T_c}$

$$\frac{I_c(T)}{I_c(0)} = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \cdot \tanh \left[\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right] = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \cdot \tanh \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \cdot \frac{T_c}{T} \cdot \frac{\Delta(0)}{2k_B T_c} \right]. \quad (72)$$

Mit $y := \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ und $x := \frac{T}{T_c}$ sowie $\Delta(0) = 1.76 \cdot k_B T_c$ lässt sich dies schreiben als

$$\tilde{y}(x) := \frac{I_c(T)}{I_c(0)} = y(x) \cdot \tanh \left[\frac{y(x)}{x} \cdot \frac{1.76}{2} \right] \quad (73)$$

wobei wir den im nächsten Abschnitt numerisch berechneten Zusammenhang $y(x) = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ benutzen⁴. Da $y(x)$ eine parameterlose Funktion der reduzierten Temperatur x ist, ist auch $\tilde{y}(x)$ eine

⁴Wie wir dort sehen werden, ist $y = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ tatsächlich nur eine Funktion der reduzierten Temperatur $x = \frac{T}{T_c}$ und nicht der Temperatur selbst.

parameterlose Funktion von x . Wir werten $\tilde{y}(x)$ mit **Mathematica** numerisch aus und tragen das Ergebnis in Abb. 21 (unten) ein (blaue Kurve).

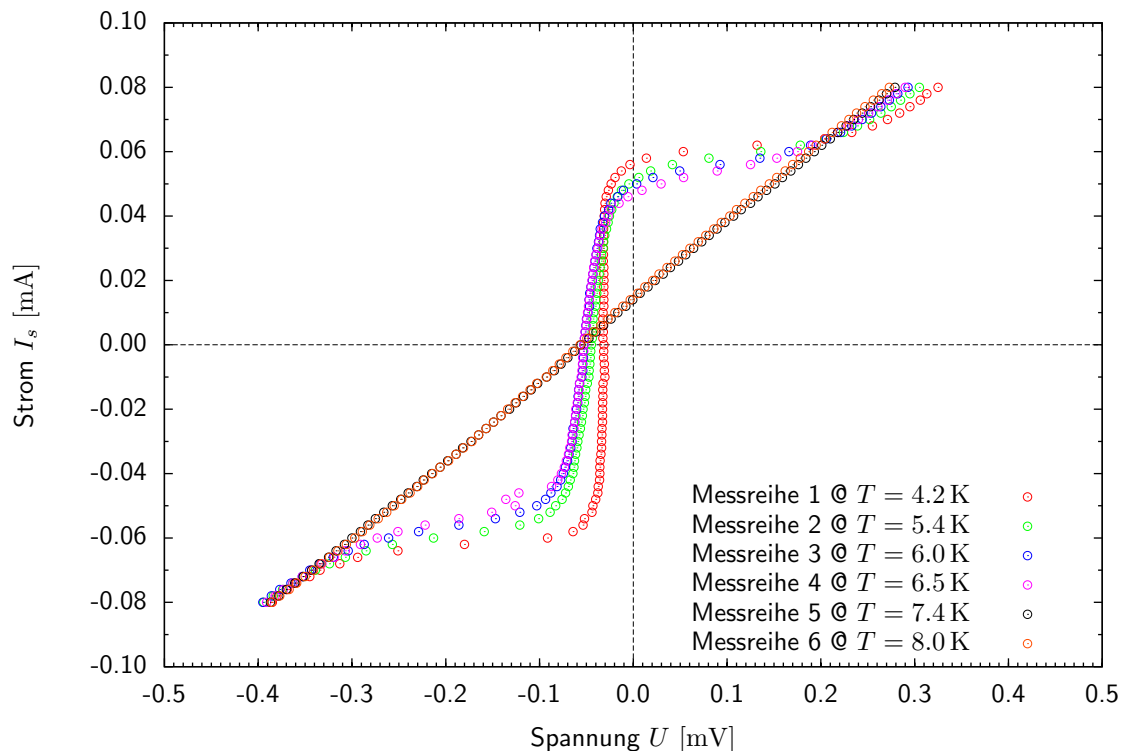


ABBILDUNG 20 : Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = 0$. Man erkennt deutlich, dass der maximale Josephson-Strom mit steigender Temperatur abnimmt und für $T \rightarrow T_c$ verschwindet. Schon mit bloßem Auge ist ersichtlich, dass der Zusammenhang zwischen I_c und T nicht linear ist. Auch hier erkennt man den schon zuvor beobachteten Spannungsoffset.

Um die Messpunkte in die Darstellung der reduzierten Größen zu überführen, müssen die in Abb. 21 (oben) dargestellten Messpunkte mit $I_c(0)^{-1}$ und T_c^{-1} skaliert werden. Wir wählen als naiven Ansatz den Messwert $I_c(0) \approx I_c(4.2 \text{ K}) = 52 \mu\text{A}$ und den Literaturwert $T_c = 9.2 \text{ K}$ als Sprungtemperatur. Als Resultat erhalten wir die schwarzen Messpunkte in Abb. 21 (unten). Die Theoriekurve liegt offensichtlich außerhalb des angenommenen Fehlerbereiches. Wir führen anschließend eine Optimierung der Übereinstimmung von Messpunkten und Theoriekurve durch, indem die Skalierungsfaktoren $I_c(0)^{-1}$ und T_c^{-1} variiert werden. Es ergibt sich

$$T_c = 10.6 \text{ K} \quad \text{und} \quad I_c(0) = 54 \mu\text{A}. \quad (74)$$

Die so skalierten Messpunkte sind in Abb. 21 (unten) rot dargestellt. Die Übereinstimmung mit der Theoriekurve ist nun deutlich besser. Während unsere erste Annahme $I_c(0) \approx I_c(4.2 \text{ K})$ recht gut war, finden wir bei der Sprungtemperatur von Niob eine deutliche Abweichung vom Literaturwert. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, bestätigt sich die Tendenz dieser Abweichung auch bei der Auswertung der Temperaturabhängigkeit der Energielücke. Es drängt sich daher die Vermutung auf, dass die gemessenen Temperaturen *nicht* mit denen am Kontakt übereinstimmen, sondern um einen gewissen Faktor zu hoch liegen. Dies kann mit der konstruktionsbedingten Lage des Temperatursensors relativ zum Josephson-Kontakt oder einer Fehleichung begründet werden.

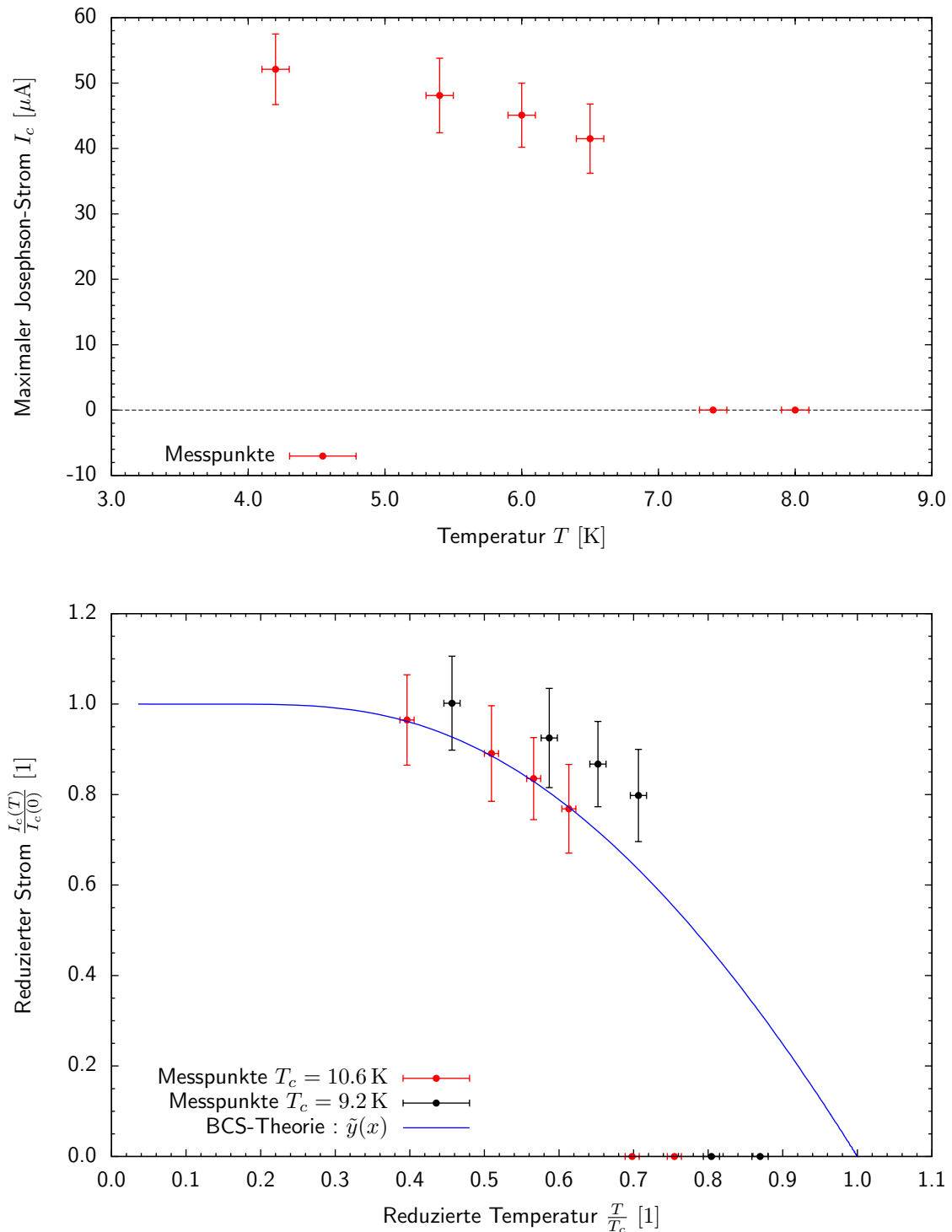


ABBILDUNG 21 : **Oben:** Aus den Messreihen 1 bis 6 bestimmte maximale Josephson-Ströme I_c . Diese und deren Fehler wurden nach dem schon zuvor beschriebenen Verfahren ermittelt. **Unten:** Temperaturabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes I_c und Vergleich mit der Theorie. Die numerisch berechnete Kurve nach der BCS-Theorie hängt von keinem Parameter mehr ab, wenn sie als reduzierter Strom gegen die reduzierte Temperatur aufgetragen wird. Für die Messpunkte sind die Skalierungsfaktoren der Achsen $I_c(0)^{-1}$ und T_c^{-1} frei einstellbar. Abgebildet sind die Messpunkte einmal für $I_c(0) = 52 \mu\text{A}$ und $T_c = 9.2 \text{ K}$ (Literaturwert der Sprungtemperatur von Niob) und für $I_c(0) = 54 \mu\text{A}$ und $T_c = 10.6 \text{ K}$. Offensichtlich entsprechen die von uns gemessenen Temperaturen nicht denen am Kontakt selbst – sie sind zu hoch.

2.2.2 Energielücke

Die Messreihen 1 bis 6 sind in Bereichen um $U = \pm 2\Delta/e$ in Abb. 22 (oben/unten) dargestellt. Man erkennt deutlich die Abnahme der Energielücke für steigende Temperaturen. Für den Vergleich mit der Theorie werten wir die Energielücke wie zuvor beschrieben aus und erhalten so die Messpunkte und Fehlerbalken in Abb. 23 (oben) wobei auch hier pauschal $\Delta T = 0.1$ K angenommen wurde.

Im Vergleich zur Bestimmung des maximalen Josephson-Stromes fällt auf, dass die Energielücken der Messreihen 5 und 6 problemlos ausgewertet werden können. D.h. bei den entsprechenden Temperaturen war der Kontakt noch supraleitend und man hätte zumindest einen kleinen spannungslosen Josephson-Strom erwartet.

Für den Vergleich mit der Theorie benutzen wir den in den Grundlagen erläuterten impliziten Zusammenhang (17)

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \tanh \left[\frac{T_c}{T} \cdot \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] \Leftrightarrow y = \tanh \left[\frac{y}{x} \right] \quad \text{mit} \quad y = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}, \quad x = \frac{T}{T_c}. \quad (75)$$

Dieser definiert eine parameterlose Funktion $y(x)$ die numerisch ausgewertet werden kann, wobei y die reduzierte Energielücke $\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ und x die reduzierte Temperatur $\frac{T}{T_c}$ beschreibt. Eine numerische Auswertung mit `Mathematica` liefert die blaue Kurve in Abb. 23 (unten). Dieser Datensatz wurde auch im vorherigen Abschnitt für die numerische Berechnung der Funktion $\tilde{y}(x)$ des reduzierten Stromes verwendet.

Um die Messpunkte in das Diagramm mit reduzierten Größen eintragen zu können, müssen diese mit den Parametern $(2\Delta(0))^{-1}$ und T_c^{-1} skaliert werden. Wir wählen als naiven Ansatz wieder den Literaturwert der Sprungtemperatur für Niob $T_c = 9.2$ K sowie den Literaturwert der Energielücke $2\Delta(0) = 2.9$ meV. Diese Wahl liefert die schwarzen Messpunkte in Abb. 23 (unten). Offensichtlich liegen die Messpunkte weit außerhalb des angenommenen Fehlerbereichs. Außerdem scheinen sie einer Kurve mit anderer Krümmung zu folgen. Wir optimieren die Lage der Messpunkte relativ zur Theoriekurve durch Variation der Parameter $(2\Delta(0))^{-1}$ und T_c^{-1} und erhalten lediglich für die Sprungtemperatur einen vom naiven Ansatz abweichenden Wert

$$T_c = 11.2 \text{ K} \quad \text{und} \quad 2\Delta(0) = 2.9 \text{ meV}. \quad (76)$$

Die so skalierten Messpunkte sind in Abb. 23 (unten) rot eingezeichnet und liegen fast perfekt auf der theoretisch vorhergesagten Kurve. Während der Literaturwert der Energielücke $2\Delta(0) = 2.9$ meV im Rahmen der Messgenauigkeit reproduziert werden konnte, finden wir auch in diesem Fall eine deutliche Abweichung der Sprungtemperatur vom Literaturwert $T_c = 9.2$ K. Wie bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes erläutert, drängt sich die Vermutung auf, dass die Temperaturmessung einem (konstruktionsbedingten?) *systematischen* Fehler unterworfen ist, der sich durch zu hohe Temperaturmessungen manifestiert.

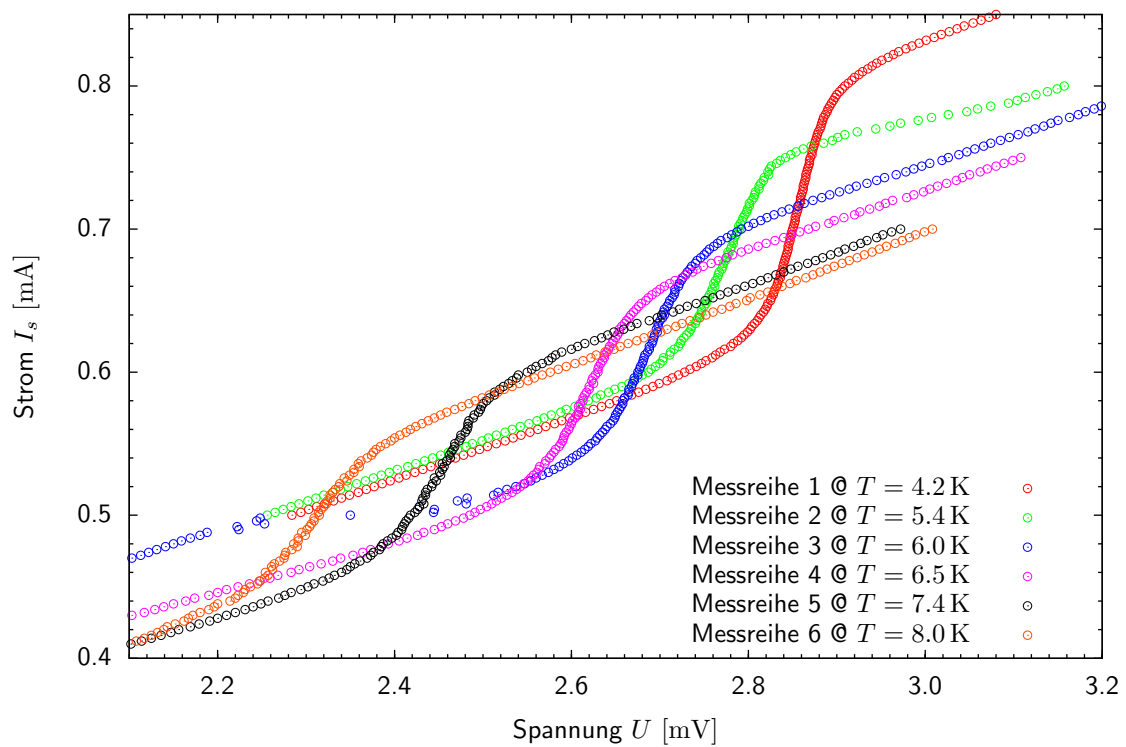
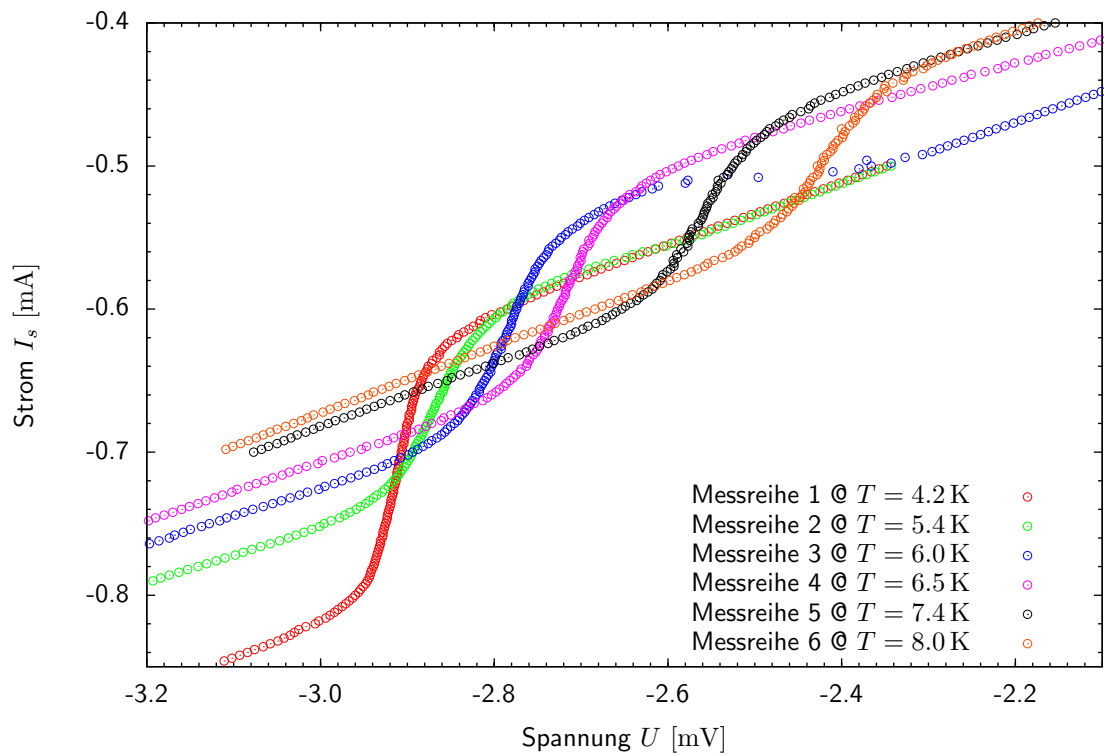


ABBILDUNG 22 : **Oben:** Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = -2\Delta/e$. Man erkennt deutlich, dass die Bandlücke mit steigender Temperatur abnimmt. Auch hier ist ersichtlich, dass der Zusammenhang zwischen 2Δ und T nicht linear ist. **Unten:** Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = +2\Delta/e$. Die Grafik entspricht weitgehend dem am Ursprung gespiegelten negativen Messbereich.

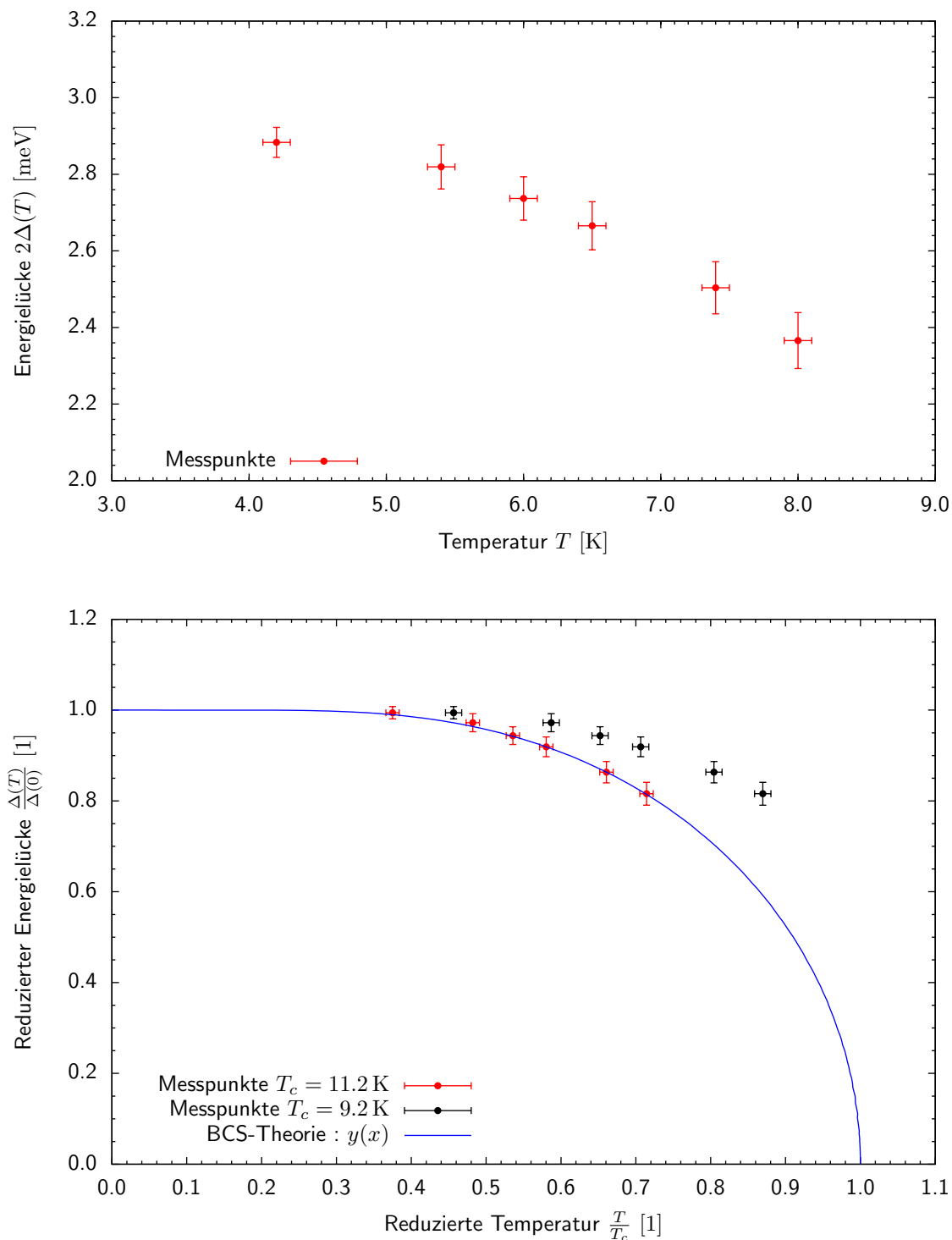


ABBILDUNG 23 : **Oben:** Aus den Messreihen 1 bis 6 bestimmte Energielücke 2Δ . Diese und deren Fehler wurden nach dem schon zuvor beschriebenen Verfahren ermittelt. **Unten:** Temperaturabhängigkeit der Energielücke 2Δ und Vergleich mit der Theorie. Die numerisch berechnete Kurve nach der BCS-Theorie hängt von keinem Parameter mehr ab, wenn sie als reduzierte Energielücke gegen die reduzierte Temperatur aufgetragen wird. Für die Messpunkte sind die Skalierungsfaktoren der Achsen $(2\Delta(0))^{-1}$ und T_c^{-1} frei einstellbar. Abgebildet sind die Messpunkte einmal für $2\Delta(0) = 2.9$ meV und $T_c = 9.2$ K (Literaturwert der Sprungtemperatur von Niob) und für $2\Delta(0) = 2.9$ meV und $T_c = 11.2$ K. Auch dieser Vergleich legt den Schluss nahe, dass die von uns gemessenen Temperaturen höher sind als die am Kontakt.

2.3 Magnetfeldabhängigkeit

Versuchsdurchführung Im folgenden Abschnitt soll die in den Grundlagen diskutierte Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes I_c experimentell verifiziert werden. Zu diesem Zweck werden bei unterschiedlichen Spulenströmen (siehe Abb. 16 (links)) I-U-Kennlinien im Bereich um $U = 0$ aufgenommen. Kontrolliert wird die Stromstärke I_B der Helmholtz-Spulen ($-1.3 \text{ A} \leq I_B \leq 1.3 \text{ A}$) über die Anzeige des Netzgerätes. Wir benutzen Gleichung (49) um die eingestellten Stromstärken in die am Probenort wirkende magnetische Flussdichte umzurechnen.

Auf Grund der zuvor erwähnten technischer Probleme konnten wir nur die Daten für $I_B \geq 0$ aufnehmen. Für $I_B \leq 0$ stellte sich heraus, dass Flussschläuche im Kontakt eingefroren waren. Da wir nicht wissen, inwieweit diese schon während der $I_B \geq 0$ -Messungen die Ergebnisse verfälscht haben (und um eine konsistente Auswertung zu gewährleisten) greifen wir auf die Datensätze einer anderen Praktikumsgruppe zurück.

Strom I_B	Magnetfeld B
[A]	[mT]
-1.2900	-2.4869
-1.1400	-2.1977
-1.0900	-2.1013
-0.9700	-1.8700
-0.8800	-1.6965
-0.7800	-1.5037
-0.6700	-1.2916
-0.5700	-1.0989
-0.4700	-0.9061
-0.3900	-0.7519
-0.2600	-0.5012
-0.1300	-0.2506
0.0000	0.0000
0.1300	0.2506
0.2600	0.5012
0.3900	0.7519
0.4700	0.9061
0.5700	1.0989
0.6700	1.2916
0.7800	1.5037
0.8800	1.6965
0.9700	1.8700
1.0900	2.1013
1.1400	2.1977
1.2900	2.4869

TABELLE 1 : Gemessene Stromstärken und die zugehörigen magnetischen Flussdichten am Ort der Probe.

Für die Auswertung standen uns Messreihen bei den in Tabelle 1 dargestellten Stromstärken (bzw. Flussdichten) zur Verfügung. Diese Messreihen enthielten Daten in unterschiedlichen Stromintervallen ($[-0.1, 0.1] \text{ mA}$, $[-0.08, 0.08] \text{ mA}$, $[-0.065, 0.065] \text{ mA}$ und $[-0.05, 0.05] \text{ mA}$) in 0.001 mA -Schritten.

2.3.1 Diskussion und Vergleich mit der Theorie

Die Messreihen für positive Ströme (bzw. Magnetfelder) sind in den Abb. 25 und 26 dargestellt. Die analogen Messreihen für negative Ströme finden sich in den Abb. 27 und 28. Deutlich erkennt man

das Durchschreiten des ersten Minimums in Abb. 25 (oben). Hier fällt der maximale Josephson-Strom bis zu $B \approx 1.1$ mT um dann wieder anzusteigen. In Abb. 25 (unten) erkennt man die auf das erste Minimum folgende Flanke mit positiver Steigung während in Abb. 26 (oben) die auf das erste Nebenmaximum folgende Flanke mit positiver Steigung während in Abb. 26 (oben) die auf das erste Nebenmaximum folgende Flanke mit positiver Steigung zu erkennen ist. In Abb. 26 (unten) erkennt man keine Veränderung mehr – die Josephson-Ströme verschwinden.

Die Messreihen in den Abb. 27 und 28 weisen dieselben Eigenschaften auf. Im Unterschied zu den Messreihen für positive Ströme erkennt man hier das erste Minimum in Abb. 27 (oben) noch nicht, da der nächste Anstieg des Josephson-Stromes nicht zu erkennen ist. Dafür erkennt man in Abb. 28 (unten) noch ein leichtes Abfallen des maximalen Josephson-Stromes für stärker werdende Magnetfelder.

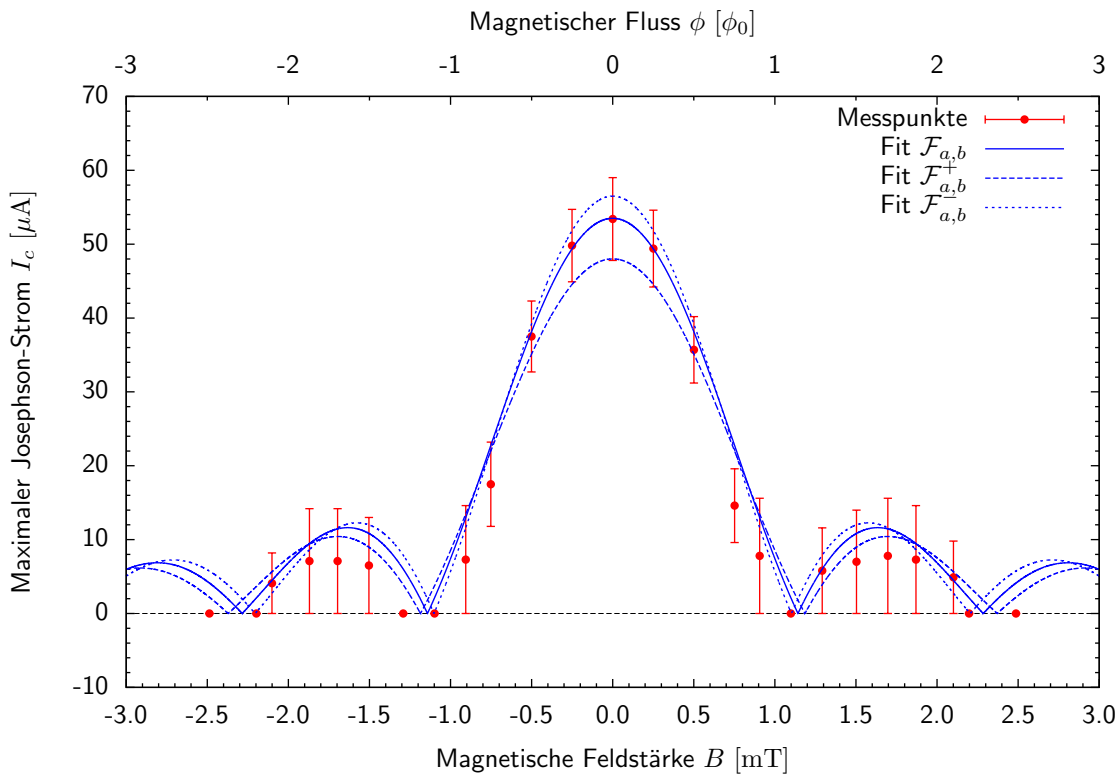


ABBILDUNG 24 : Maximaler Josephson-Strom in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte. Deutlich ist der von der Theorie vorhergesagte Interferenzeffekt zu beobachten, der durch die Spaltbeugungsfunktion beschrieben wird. Durch Variation der Parameter a und b erhalten wir die Funktion maximaler (minimaler) Periode $\mathcal{F}_{a,b}^+$ ($\mathcal{F}_{a,b}^-$). $\mathcal{F}_{a,b}$ ergibt sich mit dem Mittelwert der Perioden der extremalen Kurven.

Zum Vergleich mit der Theorie werten wir die maximalen Josephson-Ströme der in den Abb. 25, 26, 27 und 28 dargestellten Messreihen aus und tragen sie gegen die magnetische Feldstärke auf, siehe Abb. 24. Die Fehlerbalken wurden dabei ermittelt wie im Abschnitt 2.1.2 beschrieben. Für die Messpunkte mit verschwindendem Josephson-Strom (im I-U-Diagramm also Geraden) ist keine sinnvolle Fehlerangabe mehr möglich. Dies bedeutet *nicht*, dass die Größen nicht fehlerbehaftet sind, sondern dass jede Fehlerangabe auf willkürlichen Angaben beruhen würde.

Man erkennt in Abb. 24 deutlich den theoretisch vorhergesagten Interferenzeffekt. Die Minima treten immer dann auf, wenn die Josephson-Ströme über die Breite des vom Magnetfeld durchsetzten Kontaktes einander gerade kompensieren (vgl. Erläuterungen in Abschnitt 1.2.4). Zum Vergleich mit der Theorie fitten wir Kurven der Form

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(+,-)}(B) = a \cdot \left| \frac{\sin(b \cdot B)}{b \cdot B} \right| \quad (77)$$

an die Messpunkte an. Die Fits mit + (–) versuchen dabei die *Periode* b zu maximieren (minimieren). Dabei passen wir die Amplitude a an, sodass die Kurven unter Berücksichtigung möglichst vieler Messpunkte und ihrer Fehlerbalken verlaufen. Wir erhalten die in Tabelle 2 gelisteten Parameter.

	a	b
$\mathcal{F}_{a,b}^+$	48.00	2.65
$\mathcal{F}_{a,b}$	53.50	2.75
$\mathcal{F}_{a,b}^-$	56.50	2.85

TABELLE 2 : Parameter der in Abb. 24 dargestellten Theoriekurven.

Für den im folgenden Abschnitt relevanten Periodenparameter b erhalten wir den Mittelwert der Extremalkurven $b = 1/2 \cdot (b^+ + b^-) = 2.75$ mit der Fehlerabschätzung $\Delta b = 1/2 \cdot (b^- - b^+) = 0.1$, also

$$b = (2.75 \pm 0.1).$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass $b = \frac{\pi \cdot \text{mT}}{B_\Delta}$ gilt, wobei B_Δ den Abstand zwischen zwei Interferenzminima bezeichnet. Die Multiplikation mit der Einheit mT ist nötig, da b dimensionslos ist und die Achsenskalierung in Abb. 24 auf dieser Einheit beruht.

2.3.2 London'sche Eindringtiefe und Josephson-Eindringtiefe

Um die London'sche Eindringtiefe abzuschätzen ziehen wir Gleichung (47) heran. Wir finden den Zusammenhang

$$\frac{2\pi e \cdot ad \cdot B}{h} = b \cdot \frac{B}{\text{mT}} \quad (78)$$

wobei die effektive Dicke des Tunnelkontaktes durch $d = 2\lambda_L + D$ gegeben ist. Eine einfache Umformung führt zu einem Ausdruck für die London'sche Eindringtiefe

$$\lambda_L = \frac{1}{2} \left[\frac{b \cdot 10^3}{T} \cdot \frac{h}{2e\pi a} - D \right] \quad (79)$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum $h = 6.62606957 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 4.135667516 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$, der Elementarladung $e = 1.602176487 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, der Kontaktbreite $a = 10 \mu\text{m}$, der Kontaktstärke $D = (30 \pm 5) \text{ nm}$, der Einheit Tesla T sowie dem dimensionslosen Parameter $b = (2.75 \pm 0.1)$. Mit diesen Werten erhalten wir $\lambda_L = 75.504 \text{ nm}$. Für die Fehlerfortpflanzung gilt

$$\Delta\lambda_L = \frac{h}{4e\pi a} \cdot \frac{\Delta b \cdot 10^3}{T} + \frac{1}{2} \cdot \Delta D = 5.7911 \text{ nm}$$

mit $\Delta b = 0.1$ und $\Delta D = 5 \text{ nm}$ (nach [7]). Wir erhalten also als Abschätzung der London'schen Eindringtiefe

$$\lambda_L = (75.5 \pm 5.8) \text{ nm}. \quad (80)$$

Zur Berechnung der Josephson-Eindringtiefe λ_J benutzen wir Gleichung (48). Mit $j_c = \frac{I_c}{A}$, der Kontaktfläche $A = 100 \mu\text{m}^2$, der Kontaktbreite $a = 10 \mu\text{m}$, dem dimensionslosen Parameter $b = (2.75 \pm 0.1)$ sowie dem in Abschnitt 2.1.2 bestimmten maximalen Josephson-Strom $I_c = (54 \pm 6) \mu\text{A}$ für $T = 4.2 \text{ K}$ und $B = 0$ folgt für die Josephson-Eindringtiefe

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d}} = \sqrt{\frac{hA}{4e\pi\mu_0 I_c \frac{bh}{2e\pi a \text{mT}}}} = \sqrt{\frac{Aa \cdot 10^{-3} \text{ T}}{2\mu_0 I_c b}} = 51.76 \mu\text{m}.$$

Für den Fehler finden wir

$$\Delta\lambda_J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Aa \cdot 10^{-3} \text{ T}}{2\mu_0}} \left[\frac{\Delta I_c}{I_c^{3/2} b^{1/2}} + \frac{\Delta b}{I_c^{1/2} b^{3/2}} \right] = 3.82 \mu\text{m}$$

mit $\Delta I_c = 6 \mu\text{m}$ und $\Delta b = 0.1$. Damit ergibt sich als Abschätzung für die Josephson-Eindringtiefe

$$\lambda_J = (52 \pm 4) \mu\text{m}. \quad (81)$$

Offensichtlich ist $\lambda_J = 52 \mu\text{m} > 10 \mu\text{m} = a$. Wie in Abschnitt 1.2.4 erläutert kann für den untersuchten Josephson-Kontakt das Eigenfeld der das Magnetfeld abschirmenden Supraströme vernachlässigt werden. Wir erwarten demnach *kein* "Kippen" der I_c - B -Kurve wie in Abb. 12 dargestellt. Dies deckt sich mit dem gemessenen Interferenzmuster in Abb. 24, welches im Rahmen der Messgenauigkeit keine Anzeichen einer Neigung aufweist.

Im Hinblick auf die ermittelte London'sche Eindringtiefe sei darauf hingewiesen, dass der Literaturwert für *hochreines* Niob zu $\lambda_L^* = 39 \text{ nm}$ angegeben wird (nach [9]). Die große Abweichung von $\delta\lambda_L = \frac{\lambda_L - \lambda_L^*}{\lambda_L^*} \approx 94\%$ ist laut Ref. [7] auf den beschränkten Reinheitsgrad des verwendeten Niobs zurückzuführen.

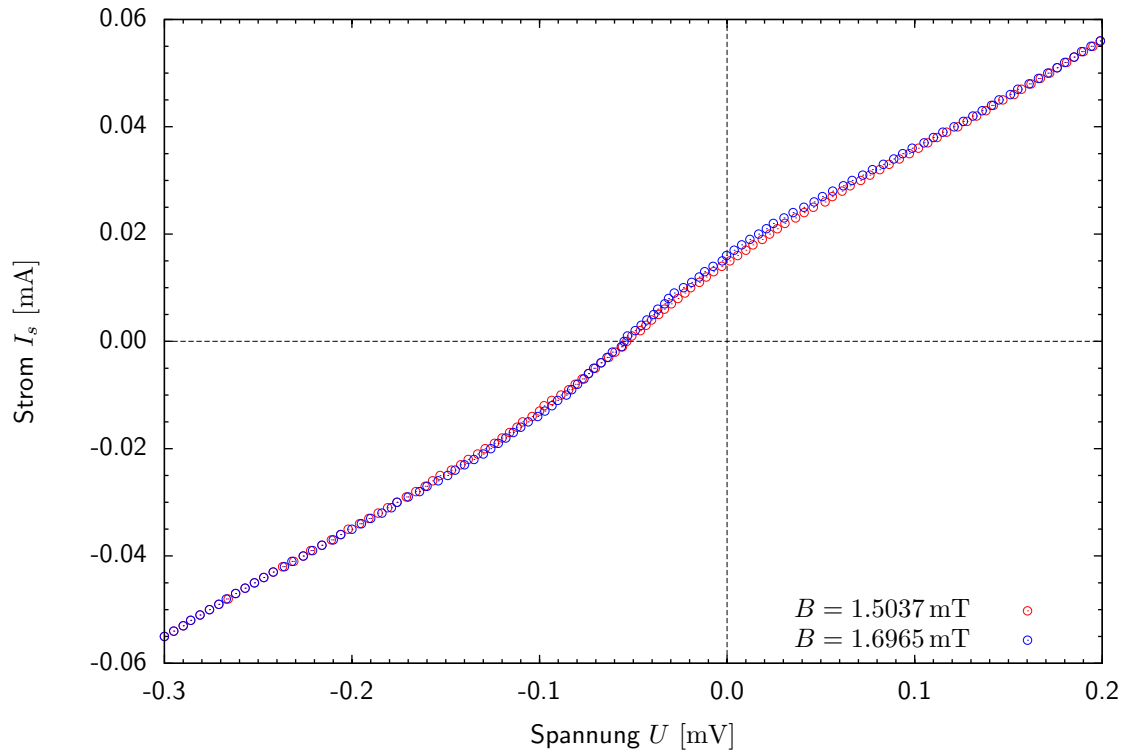
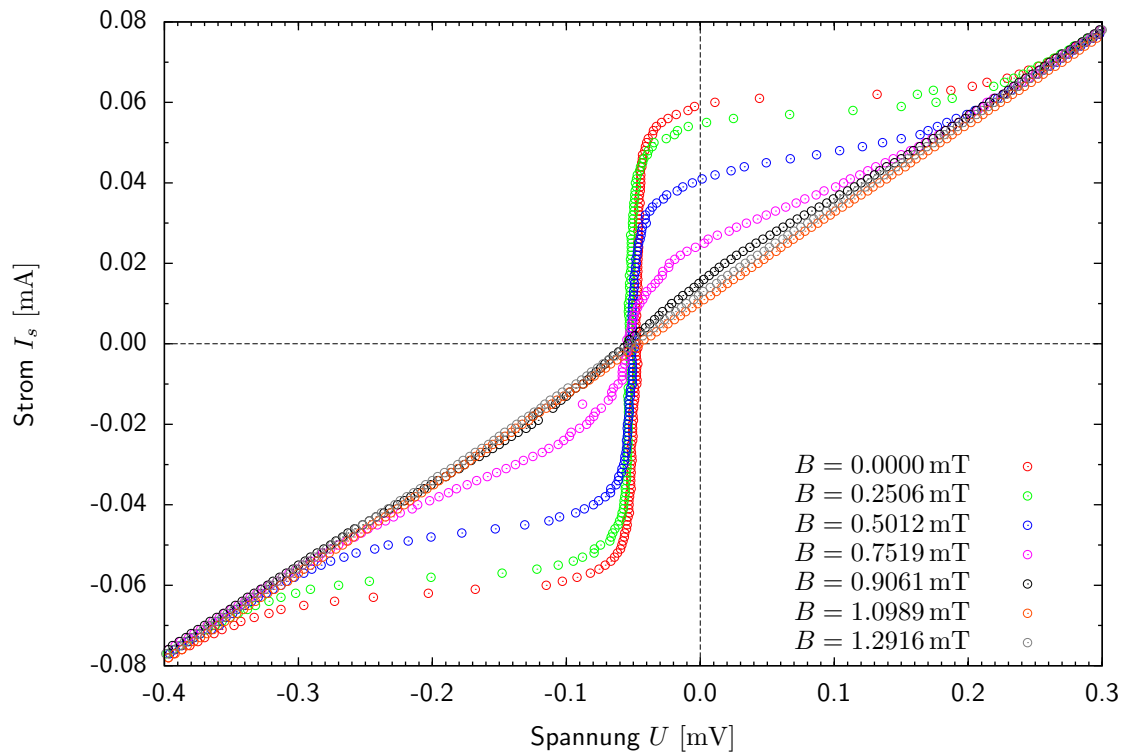


ABBILDUNG 25 : **Oben:** Die Messreihen im Bereich $0 \text{ mT} \leq B \leq 1.3 \text{ mT}$. Man erkennt wie sich der maximale Josephson-Strom I_c dem ersten Minimum nähert und es für $B \approx 1.1 \text{ mT}$ erreicht. **Unten:** Die Messreihen im Bereich $1.3 \text{ mT} \leq B \leq 1.7 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich ansteigt.

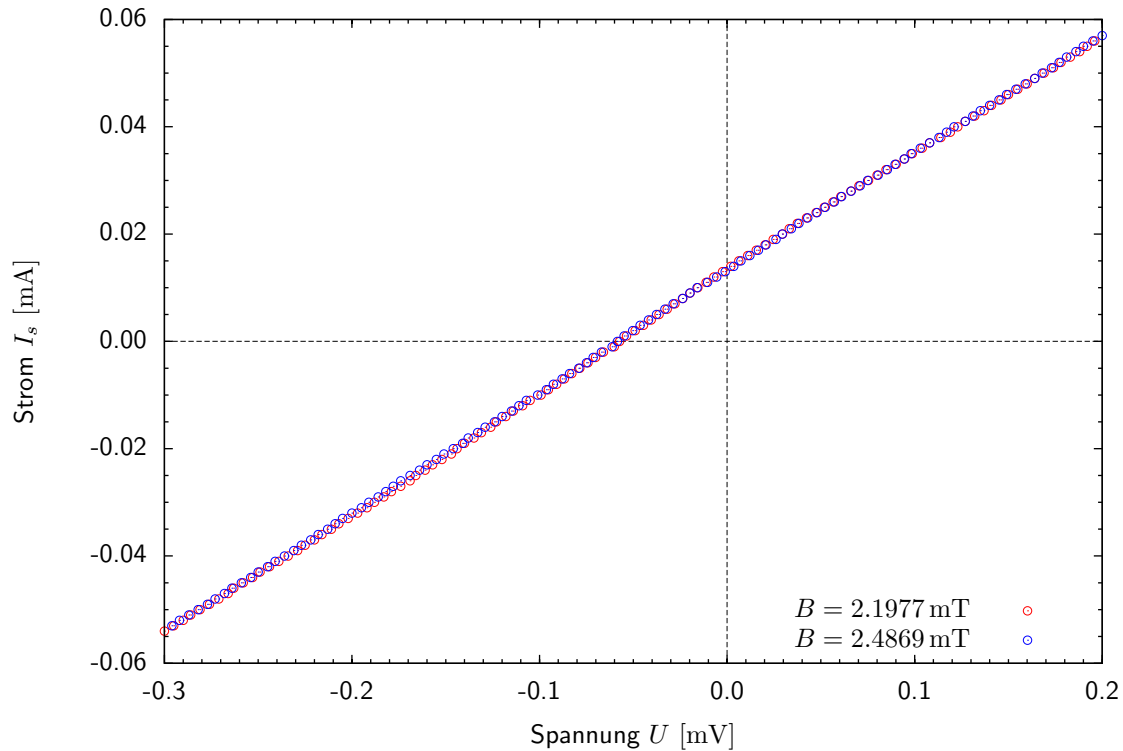
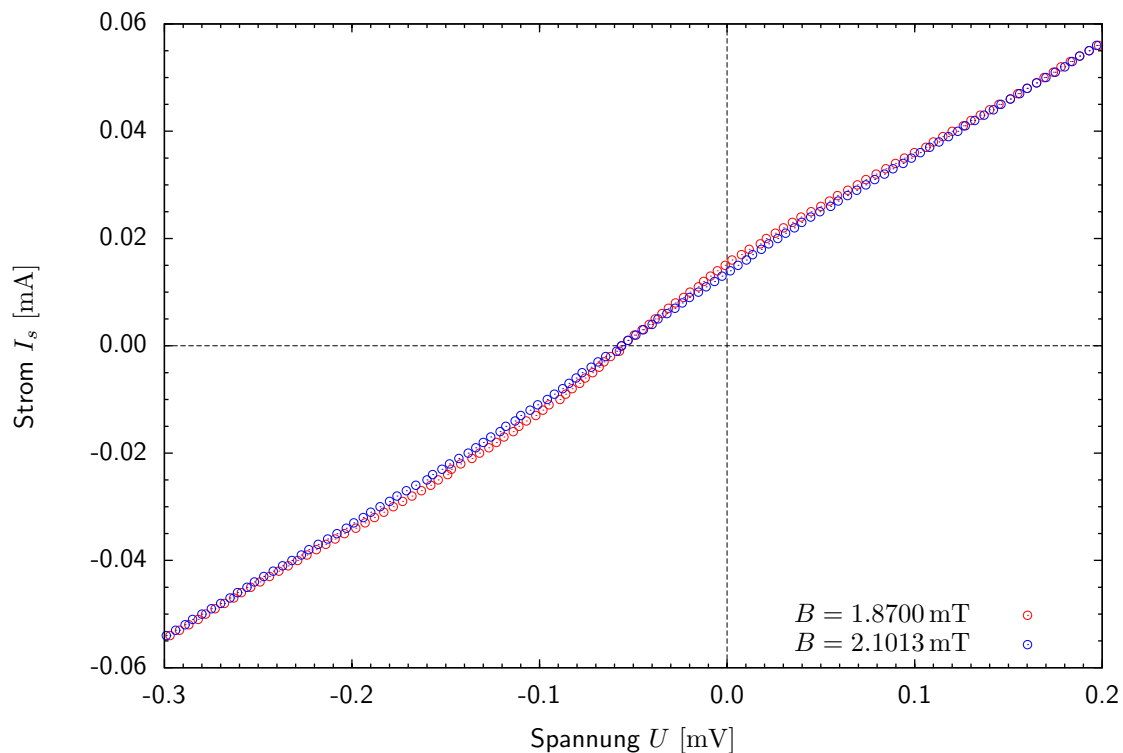


ABBILDUNG 26 : **Oben:** Die Messreihen im Bereich $1.7 \text{ mT} \leq B \leq 2.15 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich fällt. **Unten:** Die Messreihen im Bereich $2.15 \text{ mT} \leq B \leq 2.5 \text{ mT}$. Hier ist der maximale Josephson-Strom fast konstant Null.

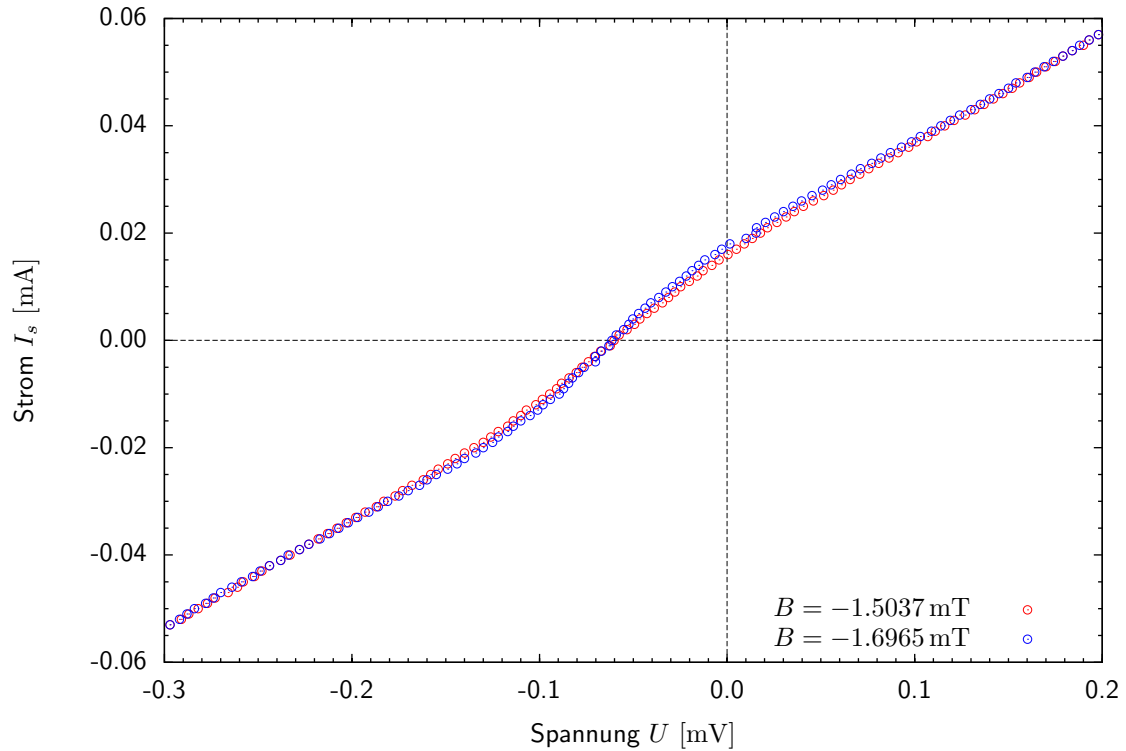
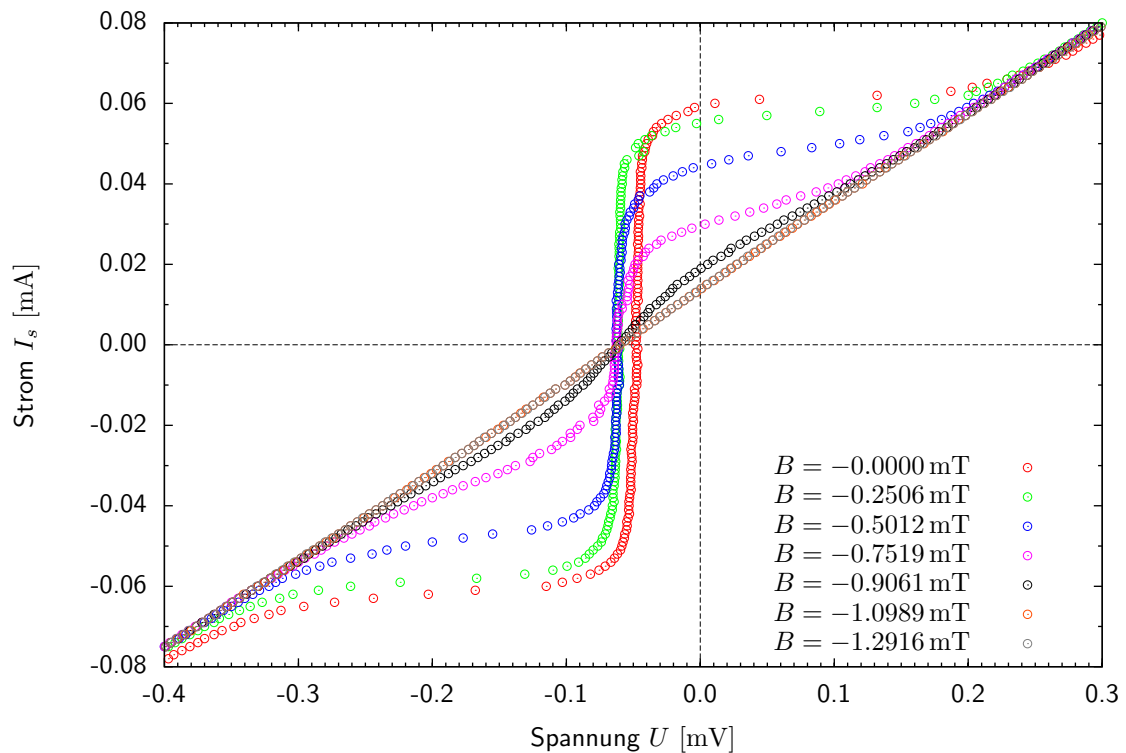


ABBILDUNG 27 : **Oben:** Die Messreihen im Bereich $-1.3 \text{ mT} \leq B \leq 0 \text{ mT}$. Man erkennt wie sich der maximale Josephson-Strom I_c dem ersten Minimum nähert und es für $B \approx -1.1 \text{ mT}$ erreicht. Die Kurven für $B = -1.0989 \text{ mT}$ und $B = -1.2916 \text{ mT}$ liegen hier aufeinander. **Unten:** Die Messreihen im Bereich $-1.7 \text{ mT} \leq B \leq -1.3 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich ansteigt.

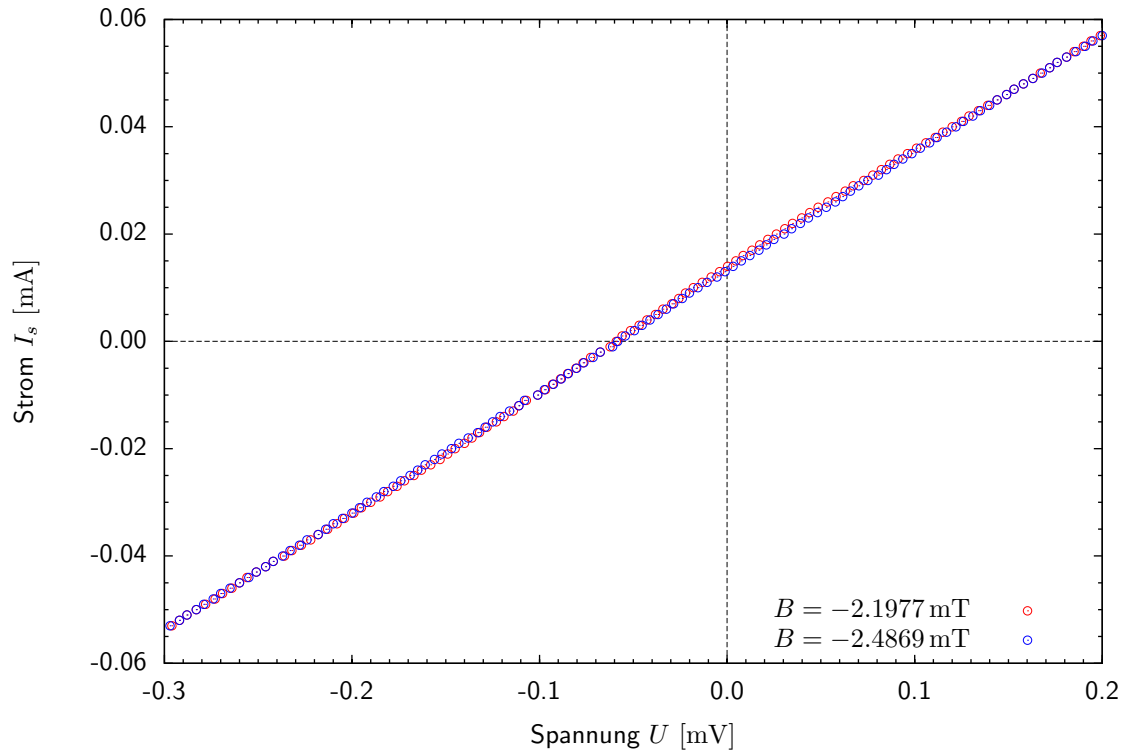
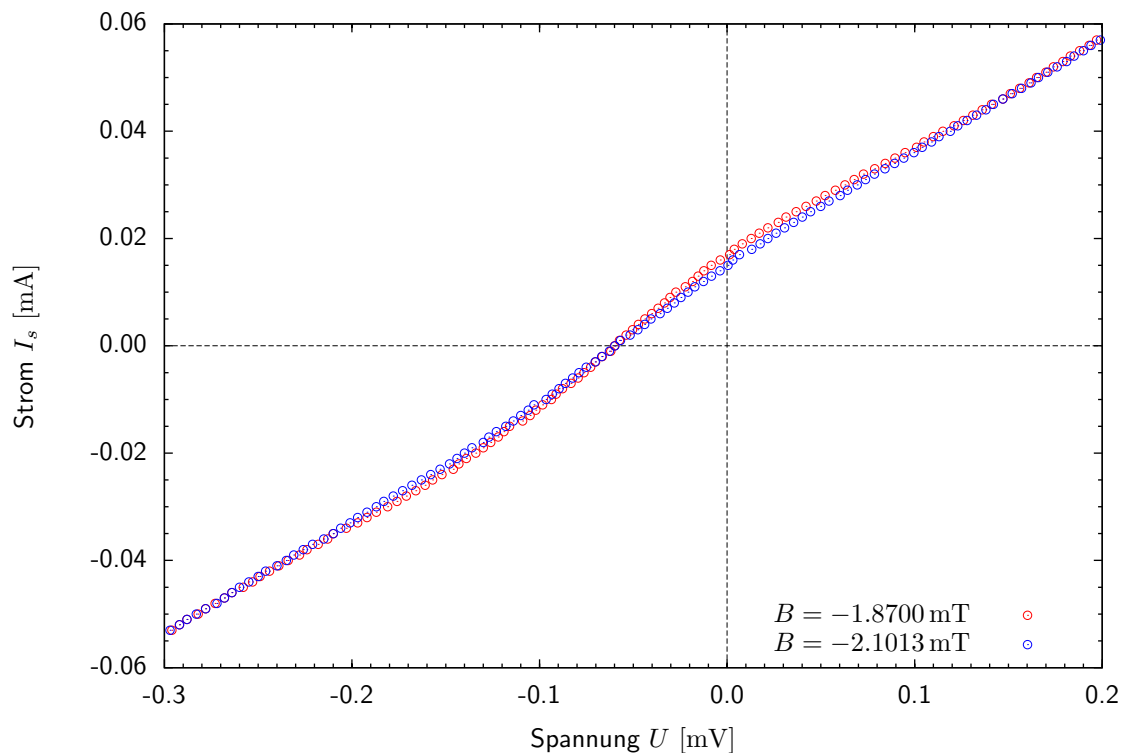


ABBILDUNG 28 : **Oben:** Die Messreihen im Bereich $-2.15 \text{ mT} \leq B \leq -1.7 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich fällt. **Unten:** Die Messreihen im Bereich $-2.5 \text{ mT} \leq B \leq -2.15 \text{ mT}$. Hier erkennt man ein leichtes Abfallen des maximalen Josephson-Stromes für stärkere Felder.

3 Fehlerdiskussion

Im Folgenden soll eine qualitative Betrachtung möglicher Fehlerquellen durchgeführt werden. Eine quantitative Abschätzung der Fehlerbereiche ist der Auswertung zu entnehmen.

- Die gemessenen Temperaturen stimmten nicht mit den tatsächlichen Temperaturen am Josephson-Kontakt überein. Dies ging aus der Messung der Temperaturabhängigkeit von Bandlücke und maximalem Josephson-Strom hervor. Mögliche Gründe sind die konstruktionsbedingte Lage des Sensors relativ zum Kontakt und zum Heizwiderstand sowie eine Fehlleitung des Sensors.
- Die Bestimmung des maximalen Josephson-Stromes erweist sich als schwierig falls dieser klein ist, da eine eindeutige Festlegung des Sprungs auf die Normalleiterkennlinie des Shunt-Widerstandes kaum möglich ist. Als Folge sind Messpunkte mit kleinen Josephson-Strömen mit großen Fehlerbalken zu versehen. Dies erschwert die Verifikation der Theorie beträchtlich, da Charakteristika bei solch niedrigen Strömen in den Fehlern untergehen (vgl. Bestimmung der Minima bei der Magnetfeldabhängigkeit).
- Die geringen Ströme und die hohe Empfindlichkeit der Anordnung hinsichtlich externer Magnetfelder führt häufig zu Sprüngen in den I-U-Kennlinien. Schon kleinste Spannungsschwankungen im Versorgungsstromnetz oder Magnetfeldimpulse nahegelegener Stromverbraucher können sich in den I-U-Kennlinien niederschlagen und diese verfälschen.
- Bei der Messung der Magnetfeldabhängigkeit wurde die am Probenort herrschende Flussdichte auf Basis der vom Netzteil angegebenen Stromstärke errechnet. Im Vergleich zu einer Messung mittels Hall-Sonde an der Probe ist diese Methode ungenau, da man sich auf nicht weiter verifizierte Annahmen stützt. Zum einen ist die Stromstärke selbst einem Fehler unterworfen. Weiterhin ist die verwendete Formel für das Magnetfeld der Helmholtzspulen nur im Zentrum exakt gültig. Hier spielt also die Justage des Spulenpaares eine entscheidende Rolle. Zu guter Letzt wurden bei der Berechnung der Flussdichte jegliche Einflüsse der den Kontakt umgebenden Materie vernachlässigt.
- Da es sich bei Niob um einen Typ II Supraleiter handelt, ist das Einfrieren von magnetischen Flussschläuchen möglich und wurde im Laufe unseres Versuches auch beobachtet. Bei der Messung der Magnetfeldabhängigkeit des Josephson-Stromes macht sich dies durch verschobene und verzerrte Interferenzkurven bemerkbar. In diesem Fall muss der Kontakt über die Sprungtemperatur erwärmt und anschließend wieder auf $T = 4.2\text{ K}$ abgekühlt werden. Diese Prozedur führte bei uns nur teilweise zum Erfolg. Angesichts der oben erwähnten falschen Temperaturanzeige stellt sich die Frage, ob der Kontakt tatsächlich über seine Sprungtemperatur von $T_c = 9.2\text{ K}$ erwärmt wurde.
- Die Bestimmung der Energielücke ist für kleine Δ vergleichsweise stark fehlerbehaftet, da der "Doppelknick" in der I-U-Kennlinie dann stark in die Länge gezogen wird (siehe hierzu Abb. 22).
- Die Bestimmung des Normalleiterwiderstandes R_{ges} von Tunnelkontakt und Shuntwiderstand ist messtechnisch bedingt ungenau, da der messbare Strom mit 1 mA nach oben begrenzt ist. Der Fit der Geraden in Abb. 18 (oben) für die äußeren ohmschen Bereiche beruht daher auf Messpunkten in einem recht schmalen Strom- und Spannungsintervall.
- Das verwendete Digitalmultimeter Keithley 2400 SourceMeter hatte bei uns die Angewohnheit mit zunehmender Häufigkeit abzustürzen und damit die Messreihen zu unterbrechen. Da der Grund hierfür nicht zu klären war, bleibt die Frage offen, inwiefern dieses Verhalten Einfluss auf die aufgenommenen Messwerte hatte.

4 Zusammenfassung

Teil 1: I-U-Charakteristik Der von uns untersuchte Josephson-Kontakt wies keine Hysterese auf. In Kombination mit der Struktur der beobachteten I-U-Kennlinie lässt dies auf einen parallel zum Kontakt geschalteten Shuntwiderstand schließen.

Die I-U-Kennlinie erwies sich als punktsymmetrisch zum Ursprung (modulo eines konstanten Spannungsoffsets) und unterteilte sich in drei charakteristische Bereiche: Um $U = 0$ ließ sich der spannungslose Josephson-Strom beobachten. Für höhere Ströme wurde sie durch den ohmschen Bereich des Shuntwiderstandes beschrieben. Nach einem Doppelknick bei $U = 2\Delta/e$ folgte ein weiterer ohmscher Bereich, der durch den Normalleitertunnelwiderstand des Kontaktes und den Shuntwiderstand bestimmt wurde.

Der spannungslose Josephson-Strom I_c bei $T = 4.2$ K und ohne Magnetfeld wurde zu

$$I_c = (54 \pm 6) \mu A$$

bestimmt. Für dieselben Umgebungsvariablen erhielten wir eine Energielücke von

$$2\Delta = (2.88 \pm 0.04) \text{ meV}.$$

Für den Shuntwiderstand wurde der Wert

$$R_s = (4.64 \pm 0.03) \Omega$$

und für den Normalleiterwiderstand des Tunnelkontaktes der Wert

$$R_n = (24.8 \pm 1.7) \Omega$$

bestimmt. Mit diesen Werten ließ sich ein Stewart-McCumber-Parameter von

$$\beta_c = (0.51 \pm 0.06)$$

berechnen. Da $\beta_c < 1$ kann man auf einen überdämpften und damit hysteresefreien Kontakt schließen.

Teil 2: Temperaturabhängigkeit Die theoretisch vorhergesagte Temperaturabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes konnte im Rahmen der Messgenauigkeit verifiziert werden. Der maximale Josephson-Strom fiel mit $T \rightarrow T_c$ zunehmend schneller ab. In diesem Zusammenhang ergaben sich die Abschätzungen

$$T_c = 10.6 \text{ K} \quad \text{und} \quad I_c(0) = 54 \mu A$$

für die Sprungtemperatur T_c von Niob und den maximalen Josephson-Strom I_c bei $T = 0$.

Auch die theoretisch vorhergesagte Temperaturabhängigkeit der Energielücke ließ sich bestätigen. Für steigende Temperaturen wird diese kleiner um für $T \rightarrow T_c$ ganz zu verschwinden. In diesem Zusammenhang erhielten wir die Abschätzungen

$$T_c = 11.2 \text{ K} \quad \text{und} \quad 2\Delta(0) = 2.9 \text{ meV}.$$

In beiden Fällen lässt der Vergleich mit dem Literaturwert $T_c^* = 9.2$ K auf einen systematischen Fehler die Temperaturmessung betreffend schließen.

Teil 3: Magnetfeldabhängigkeit Die theoretisch erwartete interferenzartige Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes konnte bis zum zweiten Minimum für positive und negative magnetische Flüsse beobachtet werden. Die Periode dieser Struktur erlaubte es die London'sche Eindringtiefe zu

$$\lambda_L = (75.5 \pm 5.8) \text{ nm}$$

abzuschätzen. Mit dem im ersten Teil bestimmten maximalen Josephson-Strom und der Geometrie des Kontaktes erhält man einen Wert für die Josephson-Eindringtiefe von

$$\lambda_J = (52 \pm 4) \mu \text{m}.$$

Da $\lambda_J = 52 \mu \text{m} > 10 \mu \text{m} = a$ (mit der Kantenlänge a des Kontaktes) ist das Eigenfeld der Supraströme in der Barriere zu vernachlässigen. Dies korreliert mit dem beobachteten Interferenzmuster.

Abbildungsverzeichnis

- 1 **Links:** Widerstand von Quecksilber nahe der Sprungtemperatur (Originalmesskurve von H. K. Onnes), aus [1]. **Rechts:** Unterschied zwischen idealem Leiter und idealem Diamagnet, aus [1]. Während ein idealer Leiter Magnetfelder auf Grund dynamischer Prozesse aus seinem Inneren verdrängt, geschieht dies bei einem idealen Diamagneten aus seinem *Zustand* selbst heraus, also statisch. Dieses Verhalten qualifiziert Supraleitung als thermodynamische Phase. 3
- 2 **Links:** Abhängigkeit der Magnetisierung eines Typ I Supraleiters vom angelegten Magnetfeld, aus [1]. Die Magnetisierung kompensiert das angelegte Magnetfeld bis zu einer (temperaturabhängigen) kritischen Magnetfeldstärke und bricht dann instantan zusammen. **Rechts:** Abhängigkeit der Magnetisierung eines Typ II Supraleiters vom angelegten Magnetfeld, aus [1]. Im Gegensatz zum Typ I Supraleiter kann hier das Magnetfeld ab einer gewissen kritischen Flussdichte B_{C1} in den Supraleiter eindringen – in Form von quantisierten Flussschläuchen. 5
- 3 **Links:** Schematische Darstellung eines Typ II Supraleiters für $B_{C1} < B_a < B_{C2}$ (Shubnikov-Phase), aus [1]. Die magnetischen Flussschläuche (Vortices) enthalten jeweils Vielfache eines Flussquants ϕ_0 und ordnen sich in einem hexagonalen Gitter an. Innerhalb der Flussschläuche ist der Festkörper normalleitend. Die Flussschläuche werden von Supraströmen im Supraleiter begrenzt. **Rechts:** Von Magnetfeld B durchsetzter supraleitender Ring, wie er zur Herleitung der Flussquantisierung herangezogen wird, aus [1]. 6
- 4 **Links:** Impulsbilanz bei der phononvermittelten Streuung zweier Elektronen nahe der Fermikante \mathbf{k}_F , aus [1]. **Rechts:** Möglicher Bereich eines Impulsvektors nach der Streuung, aus [1]. Da die mittlere Phononenenergie durch $\hbar\omega_D$ gegeben ist, kann der Impulsvektor eines Elektrons nahe der Fermikante nur in einer schmalen Schale um die Fermikugel zu liegen kommen, wenn die bei der Streuung ausgetauschte Energie über Phononen vermittelt wird. 8
- 5 **Links:** Die von der BCS-Theorie vorhergesagte Zustandsdichte freier Elektronen im Supraleitenden Zustand (a) zeichnet sich durch eine Energielücke Δ aus, die eine thermische Anregung der Cooperpaare bei niedrigen Temperaturen verhindert. In (b) ist dieser Sachverhalt in der Banddarstellung veranschaulicht, aus [1]. **Rechts:** Theoretische und experimentelle Abhängigkeit der Energielücke Δ von der Temperatur T , aus [1]. Für $T \rightarrow T_c$ schließt sich die Lücke zunehmend um beim Übergang in den normalleitenden Zustand vollständig zu verschwinden. 10
- 6 **Links:** Besetzte Zustände und Ferminiveaus eines Normalleiter-Normalleiter Tunnelkontaktes bei $T = 0$ und angelegter Spannung $U \neq 0$ (a). Die sich ergebende I-U-Charakteristik des Tunnelstromes entspricht der eines ohmschen Widerstandes (b), aus [1]. **Rechts:** Besetzte Zustände und Energieniveaus eines Supraleiter-Normalleiter Tunnelkontaktes bei $T = 0$ für $U = 0$ (c) bzw. $U = \Delta/e$ (d). Im spannungslosen Fall können weder Cooper-Paare gespalten werden, noch können Einzelelektronen vom Normalleiter in den Supraleiter tunneln. Erst ab einer Spannung von $\pm\Delta/e$ existieren freie Einzelelektronenzustände auf Höhe des Ferminiveaus im Supraleiter bzw. wird beim Übergang eines vormals gebundenen Elektrons des Supraleiters zum Normalleiter genügend Energie frei um Cooper-Paare zu spalten. Diese Effekte ergeben für beide Polungen die I-U-Charakteristik in (e), aus [1]. . . 11

7	Links: Zustandsdichten und Besetzung eines Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes für $T = 0$ und $U = 0$ (a) bzw. $T > 0$ und $U = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ (b), aus [1]. Für $T = 0$ sind keine freien Elektronenzustände besetzt und in beiden Fällen ist kein Einzelelektronentunnelstrom möglich. Für $T > 0$ können für $U = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ angeregte, freie Elektronen des negativen Supraleiters in freie Zustände nahe der Singularität des positiven Supraleiters tunneln. Für höhere Spannungen entspricht dieser Effekt einem Normalleiter-Normalleiter Tunnelkontakt. Rechts: Zustandsdichten und Besetzung eines Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes für $T = 0$ und $U = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ (c). Ab dieser Spannung ist das Aufbrechen von Cooper-Paaren des negativen Supraleiters durch die beim Einzelelektronentunneln freiwerdende Energie möglich. Es setzt auch für $T = 0$ ein Tunnelstrom ein. Die I-U-Charakteristik für $T > 0$ und $T = 0$ ist in (d) dargestellt, aus [1].	12
8	Links: Struktur eines Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes wie er für die Untersuchung der Josephson-Effekte verwendet findet, aus [1]. Rechts: Beschaltung des Kontaktes mit einer regelbaren externer Spannungs- und Stromquelle, aus [1]. Für die Herleitung der Josephson-Gleichungen ist $R = 0$	13
9	I-U-Kennlinie eines hysteretischen Josephson-Kontaktes, aus [2]. Erhöhen des Tunnelstromes führt zu einem Spannungslosen Anstieg bis zum maximalen Josephson-Strom I_c . Danach springt die Kennlinie auf die des "normalen" Supraleiter-Supraleiter Tunnelkontaktes (Einzelelektronentunneln). Beim Reduzieren des Stromes zeigt sich ein hysteretisches Verhalten, d.h. die Spannung folgt der klassischen Supraleiter-Supraleiter Charakteristik bis zu $I = 0$	14
10	Ersatzschaltbild eines realen Josephson-Kontaktes im RCSJ-Modell, aus [2]. Der ideale Josephson-Kontakt ist mit einem Kreuz markiert und wird durch seinen maximalen Josephson-Strom I_c charakterisiert. Parallel hierzu werden ein ohmscher Widerstand R und eine Kapazität C geschaltet.	15
11	Abhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes I_c von der Temperatur, aus [3]. Die gestrichelte Linie stellt dabei die für uns relevante Abhängigkeit eines Kontaktes mit zwei gleichen Supraleitern dar. Der durchgezogene Graph beschreibt die Abhängigkeit für einen Kontakt mit einem Bandlückenverhältnis von $\Delta_1(0)/\Delta_2(0) = 0.5$ für die verwendeten Supraleiter 1 und 2. Der Übersichtlichkeit halber wurde der maximale Josephson-Strom $I_c(T)$ auf $I_c(0)$ und die Temperatur T auf T_c normiert.	17
12	Messkurve des maximalen Josephson-Stromes I_s in Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld B , aus [4]. Die "Beugungsminima" treten immer für ganzzahlige Vielfache des magnetischen Flussquants auf. Die Neigung des Beugungsmusters ist auf den Einfluss des Eigenfeldes der das Magnetfeld abschirmenden Supraströme an der Barriere zurückzuführen.	18
13	Phasendiagramm von ^4He , aus [5]. Die Linie zwischen der flüssigen und der supraflüssigen Phase trifft bei ca. $T_\lambda = 2.17\text{K}$ auf die Temperatur-Achse. Diese Temperatur wird als Lambdapunkt bezeichnet und markiert den Phasenübergang von fluidem Helium in die suprafluide Phase.	20
14	Links: Schematischer Aufbau einer Drehschieberpumpe, aus [6]. Rechts: Schematischer Aufbau des verwendeten Badkryostaten, aus [7]. Die Befüllung des Stickstoff-Schildes erfolgt vollautomatisch über einen Regelkreis. Die innere Kammer wird manuell mit flüssigem Helium befüllt. Das Isolationsvakuum wird mit Hilfe einer Drehschieberpumpe erzeugt.	21
15	Links: Schematischer Aufbau eines Helmholtz-Spulenpaares, aus [8]. Rechts: Qualitativer Verlauf der Feldlinien im Querschnitt durch eine Helmholtzanordnung, aus [8]. Man erkennt im Zentrum das näherungsweise homogene Magnetfeld.	22

16	Links: Schematischer Aufbau der Messeinrichtung, aus [7]. Der Strom durch den Josephson-Kontakt wird mittels digitalem Strommessgerät an die Software auf dem PC weitergegeben. Eine externe Spannungsquelle erlaubt es den Kontakt zu heizen. Zwei getrennte Helmholtz-Anordnungen erlauben zum einen die Kompensation des Erdmagnetfeldes und zum anderen das kontrollierte Anlegen eines externen Magnetfeldes. Rechts: Beschaltung des Josephson-Kontaktes zur Strom- und Spannungsmessung mit dem Keithley 2400 SourceMeter, aus [7].	22
17	Oben: Übersichtsmessung der I-U-Kennlinie. Man erkennt für $U = 0$ den spannungslosen Josephson-Strom. Die anschließende Steigung ist durch den Widerstand des Shunts gegeben. Bei einer Spannung von $U = 2\Delta/e$ setzt das Tunneln von Einzelelektronen ein und der Gesamt-widerstand fällt ab. Unten: Hier wurden die Messreihen 1 und 2 überlagert. Offensichtlich stimmen die I-U-Kennlinien für ansteigende und absteigende Messreihen überein. Der Josephson-Kontakt ist also hysteresefrei.	24
18	Oben: Messreihe 3 mit hoher Auflösung in den kritischen Bereichen. Die Spannungsdifferenz zwischen den äußeren Stufen entspricht gerade $4\Delta/e$, die Stromdifferenz der zentralen Stufe hingegen $2I_c$. Unten: Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich des spannungslosen Josephson-Stromes. Der maximale Josephson-Strom wird über die y -Koordinaten der Schnittpunkte der eingezeichneten Fit-Geraden bestimmt. Man erkennt einen Spannungsoffset, der wegen der Symmetrie nicht berücksichtigt werden muss.	26
19	Oben: Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich $U \approx 2\Delta/e$. Die exakte Spannung $U = 2\Delta/e$ wird als Mittelwert der x -Werte der beiden Schnittpunkte der drei Fit-Geraden gewählt. Diese geben auch ein Maß für den Fehler an. Unten: Dieselbe Konstruktion für den Ausschnitt aus Messreihe 3 im Bereich $U \approx -2\Delta/e$	29
20	Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = 0$. Man erkennt deutlich, dass der maximale Josephson-Strom mit steigender Temperatur abnimmt und für $T \rightarrow T_c$ verschwindet. Schon mit bloßem Auge ist ersichtlich, dass der Zusammenhang zwischen I_c und T nicht linear ist. Auch hier erkennt man der schon zuvor beobachteten Spannungsoffset.	32
21	Oben: Aus den Messreihen 1 bis 6 bestimmte maximale Josephson-Ströme I_c . Diese und deren Fehler wurden nach dem schon zuvor beschriebenen Verfahren ermittelt. Unten: Temperaturabhängigkeit des maximalen Josephson-Stromes I_c und Vergleich mit der Theorie. Die numerisch berechnete Kurve nach der BCS-Theorie hängt von keinem Parameter mehr ab, wenn sie als reduzierter Strom gegen die reduzierte Temperatur aufgetragen wird. Für die Messpunkte sind die Skalierungsfaktoren der Achsen $I_c(0)^{-1}$ und T_c^{-1} frei einstellbar. Abgebildet sind die Messpunkte einmal für $I_c(0) = 52 \mu\text{A}$ und $T_c = 9.2 \text{ K}$ (Literaturwert der Sprungtemperatur von Niob) und für $I_c(0) = 54 \mu\text{A}$ und $T_c = 10.6 \text{ K}$. Offensichtlich entsprechen die von uns gemessenen Temperaturen nicht denen am Kontakt selbst – sie sind zu hoch.	33
22	Oben: Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = -2\Delta/e$. Man erkennt deutlich, dass die Bandlücke mit steigender Temperatur abnimmt. Auch hier ist ersichtlich, dass der Zusammenhang zwischen 2Δ und T nicht linear ist. Unten: Die Messreihen 1 bis 6 im Bereich um $U = +2\Delta/e$. Die Grafik entspricht weitgehend dem am Ursprung gespiegelten negativen Messbereich.	35

23	Oben: Aus den Messreihen 1 bis 6 bestimmte Energielücke 2Δ . Diese und deren Fehler wurden nach dem schon zuvor beschriebenen Verfahren ermittelt. Unten: Temperaturabhängigkeit der Energielücke 2Δ und Vergleich mit der Theorie. Die numerisch berechnete Kurve nach der BCS-Theorie hängt von keinem Parameter mehr ab, wenn sie als reduzierte Energielücke gegen die reduzierte Temperatur aufgetragen wird. Für die Messpunkte sind die Skalierungsfaktoren der Achsen $(2\Delta(0))^{-1}$ und T_c^{-1} frei einstellbar. Abgebildet sind die Messpunkte einmal für $2\Delta(0) = 2.9 \text{ meV}$ und $T_c = 9.2 \text{ K}$ (Literaturwert der Sprungtemperatur von Niob) und für $2\Delta(0) = 2.9 \text{ meV}$ und $T_c = 11.2 \text{ K}$. Auch dieser Vergleich legt den Schluss nahe, dass die von uns gemessenen Temperaturen höher sind als die am Kontakt.	36
24	Maximaler Josephson-Strom in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte. Deutlich ist der von der Theorie vorhergesagte Interferenzeffekt zu beobachten, der durch die Spaltbeugungsfunktion beschrieben wird. Durch Variation der Parameter a und b erhalten wir die Funktion maximaler (minimaler) Periode $\mathcal{F}_{a,b}^+$ ($\mathcal{F}_{a,b}^-$). $\mathcal{F}_{a,b}$ ergibt sich mit dem Mittelwert der Perioden der extremalen Kurven.	38
25	Oben: Die Messreihen im Bereich $0 \text{ mT} \leq B \leq 1.3 \text{ mT}$. Man erkennt wie sich der maximale Josephson-Strom I_c dem ersten Minimum nähert und es für $B \approx 1.1 \text{ mT}$ erreicht. Unten: Die Messreihen im Bereich $1.3 \text{ mT} \leq B \leq 1.7 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich ansteigt.	41
26	Oben: Die Messreihen im Bereich $1.7 \text{ mT} \leq B \leq 2.15 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich fällt. Unten: Die Messreihen im Bereich $2.15 \text{ mT} \leq B \leq 2.5 \text{ mT}$. Hier ist der maximale Josephson-Strom fast konstant Null.	42
27	Oben: Die Messreihen im Bereich $-1.3 \text{ mT} \leq B \leq 0 \text{ mT}$. Man erkennt wie sich der maximale Josephson-Strom I_c dem ersten Minimum nähert und es für $B \approx -1.1 \text{ mT}$ erreicht. Die Kurven für $B = -1.0989 \text{ mT}$ und $B = -1.2916 \text{ mT}$ liegen hier aufeinander. Unten: Die Messreihen im Bereich $-1.7 \text{ mT} \leq B \leq -1.3 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich ansteigt. . . .	43
28	Oben: Die Messreihen im Bereich $-2.15 \text{ mT} \leq B \leq -1.7 \text{ mT}$. Man erkennt, dass der maximale Josephson-Strom in diesem Bereich fällt. Unten: Die Messreihen im Bereich $-2.5 \text{ mT} \leq B \leq -2.15 \text{ mT}$. Hier erkennt man ein leichtes Abfallen des maximalen Josephson-Stromes für stärkere Felder.	44

Literatur

- [1] IBACH, Harald ; LÜTH, Hans: *Festkörperphysik: Einführung in die Grundlagen*. 7. Aufl. Springer, 2008
- [2] BUCKEL, Werner ; KLEINER, Reinhold: *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. Wiley-VCH, Weinheim, 2004
- [3] AMBEGAOKAR, Vinay ; BARATOFF, Alexis: Tunneling Between Superconductors. In: *Phys. Rev. Lett.* 10 (1963), Jun, 486–489. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.486>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.10.486
- [4] PETLEY, Brian W.: *Einführung in die Josephson-Effekte*. Dr. Alfred Hüthling Verlag GmbH, Heidelberg, 1975
- [5] WIKIPEDIA: *Helium*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Helium>. Version: 2011. – [Online; Stand 25. Dezember 2011]
- [6] WIKIPEDIA: *Drehschieberpumpe*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehschieberpumpe>. Version: 2011. – [Online; Stand 25. Dezember 2011]
- [7] SCHRADE, Markus: *Der DC-Josephson-Effekt als Praktikumsversuch*, Universität Stuttgart, 1. Physikalisches Institut, Staatsexamensarbeit, 2008
- [8] WIKIPEDIA: *Helmholtz-Spule*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Helmholtz-Spule>. Version: 2011. – [Online; Stand 25. Dezember 2011]
- [9] KITTEL, Charles: *Einführung in die Festkörperphysik*. überarbeitete und erweiterte Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005