

Physikalisches Fortgeschrittenenpraktikum im WS 2011/12

UNIVERSITÄT STUTTGART

**Protokoll zum Versuch**

# **V16: Photonenstatistik an (nicht-)klassischen Lichtquellen**

Andreas Dietz, Nicolai Lang

12. November 2011

## **Zusammenfassung**

Mit Hilfe eines Intensitätsinterferometers (Hanbury Brown-Twiss Interferometer) wird die Photonenstatistik verschiedener Lichtquellen ausgemessen. Im Speziellen werden klassisch beschreibbare thermische und kohärente Lichtquellen untersucht. Weiterhin wird die Photonenstatistik einer nur quantenmechanisch beschreibbaren Ein-Photonen-Quelle aufgenommen. Als nicht-klassische Emitter finden NV-Störzentren in Diamant Anwendung.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1 Grundlagen der Quantenmechanik	3
1.1.1 Schwarzkörperstrahlung	3
1.1.2 Das Plancksche Strahlungsgesetz	4
1.2 Kohärenz und Korrelation	4
1.2.1 Korrelationsfunktion erster Ordnung	4
1.2.2 Korrelationsfunktion zweiter Ordnung	5
1.3 Theoretische Grundlagen der Quantenoptik	6
1.3.1 Elektromagnetisches Feld und zweite Quantisierung	6
1.3.2 Thermisches Licht	9
1.3.3 Kohärentes Licht: Glauber-Zustände	10
1.3.4 Nicht-klassisches Licht: Fock-Zustände	12
1.3.5 Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung	15
1.4 Experimentelle Grundlagen	17
1.4.1 Intensitätsinterferometrie	17
1.4.2 Immersionsmikroskopie	18
1.4.3 Raumfilter	18
<b>2 Auswertung</b>	<b>20</b>
2.1 Thermisches Licht	20
2.2 Kohärentes Licht	25
2.3 Nicht-klassisches Licht – NV-Zentren als Einzelphotonenquellen	27
2.3.1 Zeitkonstante	27
2.3.2 Größe des NV-Zentrums	32
2.3.3 Relative Bewegung der Probe während der Messung	35
2.3.4 Crosstalk der APDs	36
<b>3 Fehlerdiskussion</b>	<b>39</b>
<b>4 Zusammenfassung</b>	<b>40</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>41</b>
<b>Literatur</b>	<b>44</b>

## 1 Grundlagen

### 1.1 Grundlagen der Quantenmechanik

Die Entwicklung der Quantenmechanik ist eng verknüpft mit den Emissionseigenschaften sog. *schwarzer Strahler*. Wie vor jedem Paradigmenwechsel wurde die Gemeinde der Physiker mit im Rahmen der akzeptierten Theorien (hier: die klassische Elektrodynamik) nicht erklärbaren Phänomenen konfrontiert (vgl. Ultraviolett katastrophe).

#### 1.1.1 Schwarzkörperstrahlung

Nach dem KIRCHHOFFSCHEN STRAHLUNGSGESETZ ist der *spektrale Absorptionsgrad*  $\alpha'_\nu$  gleich dem *spektralen Emissionsgrad*  $\varepsilon'_\nu$ ,  $\alpha'_\nu = \varepsilon'_\nu$ . In Worten: Ein Körper, der Strahlung gut absorbiert, ist zugleich ein guter Emittent thermischer Strahlung und umgekehrt. Man definiert nun einen *idealisierten schwarzen Körper/Strahler* als ein Objekt mit optimalem Absorptionsgrad  $\alpha'_\nu = 1$ . Ein solcher Körper absorbiert jede auf ihn fallende elektromagnetische Strahlung vollständig; er erscheint also in jedem Spektralbereich völlig schwarz.

Nach dem oben erwähnten Kirchhoffschen Strahlungsgesetz ist ein schwarzer Körper zugleich ein idealer Emittent thermischer Strahlung. Kein realer Körper kann bei einer gegebenen Temperatur  $T$  mehr Strahlung emittieren als ein schwarzer Körper. Die spektrale Verteilung  $u(\lambda)$  der *Schwarzkörperstrahlung* ist demnach unabhängig von der Beschaffenheit des schwarzen Strahlers und ist allein durch seine Temperatur bestimmt. Spektrale Verteilungen für unterschiedliche Temperaturen sind in Abb. 1 dargestellt. Man erkennt für steigende Temperaturen eine Zunahme der absoluten Intensitäten sowie eine Verschiebung des Emissionsmaximums hin zu kürzeren Wellenlängen.

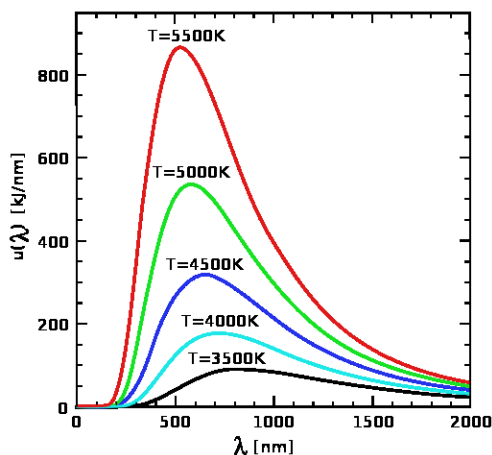


ABBILDUNG 1 (Farbe online) : Spektrale Verteilung  $u(\lambda)$  der Intensität eines idealen schwarzen Strahlers für unterschiedliche Temperaturen  $T$  (Quelle: [1]). Man erkennt sowohl die Änderung der maximalen Intensität als auch die Verschiebung des Emissionsmaximums mit zunehmender Temperatur. Die Lage des Maximums wird vom WIENSCHEN VERSCHIEBUNGSGESETZ beschrieben.

Der Versuch der theoretische Beschreibung der in Abb. 1 gezeigten Kurven führte zur Entwicklung der Lichtquantenhypothese und damit der Quantenmechanik. Ein empirischer Versuch die Schwarzkörperstrahlung zu erklären war das WIENSCHES STRAHLUNGSGESETZ

$$u_{\text{Wien}}(\lambda) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot \exp\left(-\frac{c}{\lambda T}\right) \quad (1)$$

welches für *kleine* Wellenlängen die beobachteten Verläufe gut beschreibt aber für große Wellenlängen versagt. Umgekehrt ließ sich aus der klassischen Elektrodynamik das RAYLEIGH-JEANS-GESETZ

$$u_{\text{Rayleigh}}(\lambda) = \frac{2\pi ck_B T}{\lambda^4} \quad (2)$$

herleiten. Dieses beschreibt die Kurven in Abb. 1 für *große* Wellenlängen und versagt für große Frequenzen. Integriert man das Rayleigh-Jeans-Gesetz über den gesamten Spektralbereich divergiert der gewonnene Ausdruck (wegen  $\frac{1}{\lambda^4}$ ). Diese offensichtlich falsche Vorhersage der klassischen

Elektrodynamik (Ultraviolett katastrophe) für die Energie der Schwarzkörperstrahlung führte zur Lichtquantenhypothese mit der das *Plancksche Strahlungsgesetz* hergeleitet werden kann.

### 1.1.2 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Das ursprünglich von PLANCK empirisch hergeleitete Strahlungsgesetz lautet

$$u_{\text{Planck}}(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (3)$$

und beschreibt die Emissionskurven für alle Wellenlängen korrekt. Als Grenzfälle ergeben sich das Wiensche Strahlungsgesetz und das Rayleigh-Jeans-Gesetz. Integriert man über den gesamten Spektralbereich findet man für die Energiedichte der Schwarzkörper- oder Hohlraumstrahlung

$$U(T)dV = \sigma^* T^4 dV \quad \text{mit} \quad \sigma^* = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \quad (4)$$

also einen *endlichen* Wert.

Die Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes benutzt zum einen die aus der klassischen Elektrodynamik bekannte Zustandsdichte der elektromagnetischen Moden in einem Hohlraum und zum anderen die Hypothese, dass diese Moden durch harmonische Oszillatoren beschrieben werden können. Die Licht*quanten*hypothese fließt ein, indem postuliert wird, dass das Hinzufügen und Abgeben von Energie an einen solchen Oszillator nur in *diskreten* Energieeinheiten  $h\nu = \hbar\omega$  stattfinden kann (siehe quantenharmonischer Oszillator). Diese Energiequanten werden als *Photonen* bezeichnet.

Die Ultraviolett katastrophe wird letztlich dadurch vermieden, dass zwar unendlich viele Moden beliebiger Frequenzen  $\nu$  *prinzipiell* anregbar sind, bei einer zur Verfügung stehenden thermischen Energie von  $k_B T$  pro Freiheitsgrad aber nur diejenigen Oszillatoren mit  $\hbar\omega \leq k_B T$  auch wirklich angeregt werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei bemerkt, dass normale Glühlampen (genauer: der Glühfaden) näherungsweise durch einen schwarzen Strahler beschrieben werden können. Das von ihnen emittierte *thermische Licht* kann daher durch das Plancksche Strahlungsgesetz näherungsweise beschrieben werden.

## 1.2 Kohärenz und Korrelation

Die räumliche oder zeitliche Korrelation der vorzeichenbehafteten Feldstärke einer elektromagnetischen Welle wird *Kohärenz* genannt. Sie ist ausschlaggebend für das Auftreten von Interferenzeffekten. Man unterscheidet zwischen Korrelationen *erster* und *zweiter* Ordnung. Während die Korrelation erster Ordnung die Phasenbeziehung elektromagnetischer Wellen analysiert ist die Korrelation zweiter Ordnung ein Maß für räumlich und zeitlich korrelierte Intensitäten.

### 1.2.1 Korrelationsfunktion erster Ordnung

Die **normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung** für elektromagnetische Wellen ist gegeben durch

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\left[ \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle \right]^{1/2}} \quad (5)$$

wobei die Mittelung als Ensemblemittelwert über viele Realisierungen zu verstehen ist. Im Fall elektromagnetischer Felder hat man es oft mit stationären Zuständen zu tun, sodass anstelle des Ensemblemittelwertes der Zeitmittelwert gebildet werden kann. Die Korrelationsfunktion erster Ordnung spielt eine wichtige Rolle bei der Quantifizierung von Interferenzeffekten wie sie z.B. bei Interferometern beobachtet werden. Zwei Spezialfälle obiger Definition sind in der Physik von besonderer Bedeutung:

- **Zeitliche Kohärenz** bezeichnet eine nicht verschwindende Korrelation des elektrischen Feldes an ein und dem selben Ort für verschiedene Zeiten. Sei also  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 =: \mathbf{r}$  und  $\tau := t_2 - t_1$ , dann ist die Korrelation erster Ordnung gegeben durch

$$g^{(1)}(\tau) \equiv g^{(1)}(\mathbf{r}; \tau) = \frac{\langle E^*(\mathbf{r}, t)E(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}{\langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle} \quad (6)$$

wobei die Mittelung über  $t$  erfolgt. Für  $|g^{(1)}(\tau)| = 1$  ( $|g^{(1)}(\tau)| = 0$ ) spricht man von zeitlich kohärentem (inkohärentem) Licht. In der Praxis fällt  $g^{(1)}(\tau)$  für  $\tau \rightarrow \infty$  mehr oder weniger schnell von 1 auf 0 ab. Ein Maß für die Abfallgeschwindigkeit ist die *Kohärenzzeit*  $\tau_c$ .

- **Räumliche Kohärenz** bezeichnet eine nicht verschwindende Korrelation des elektrischen Feldes an verschiedenen Orten zur gleichen Zeit. Sei also  $t_1 = t_2 =: t$ , dann ist die Korrelation erster Ordnung gegeben durch

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle E^*(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_2, t) \rangle}{\left[ \langle |E(\mathbf{r}_1, t)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r}_2, t)|^2 \rangle \right]^{1/2}} \quad (7)$$

wobei die Mittelung über  $t$  erfolgt. Für  $|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 1$  ( $|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 0$ ) spricht man von räumlich kohärentem (inkohärentem) Licht. In der Praxis fällt  $g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  für  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$  mehr oder weniger schnell von 1 auf 0 ab. Ein Maß für die Abfallgeschwindigkeit ist die *Kohärenzlänge*  $l_c$ .

## 1.2.2 Korrelationsfunktion zweiter Ordnung

Die **normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung** für elektromagnetische Wellen ist gegeben durch

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1)E^*(\mathbf{r}_2, t_2)E(\mathbf{r}_1, t_1)E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle} \quad (8)$$

Auch hier ist die Mittelung im allgemeinen Fall als Ensemblemittelwert zu verstehen der für stationäre Zustände als Zeitmittelwert ausgeführt werden kann. Die am häufigsten betrachtete Größe ist die zeitliche Intensitätskorrelationsfunktion. Sei also  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 =: \mathbf{r}$  und  $\tau := t_2 - t_1$ , dann ist die Korrelation zweiter Ordnung gegeben durch

$$g^{(2)}(\tau) \equiv g^{(2)}(\mathbf{r}; \tau) = \frac{\langle E^*(\mathbf{r}, t)E^*(\mathbf{r}, t + \tau)E(\mathbf{r}, t)E(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}{\langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle^2} = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (9)$$

mit  $I(t) \equiv I(\mathbf{r}, t) \propto |E(\mathbf{r}, t)|^2$ . Da Intensitäten nicht negative Größen sind, kennzeichnet  $g^{(2)}(\tau) = 1$  unkorrelierte Intensitätsverläufe und  $g^{(2)}(\tau) > 1$  weist auf positive zeitliche Korrelationen hin während  $0 \leq g^{(2)}(\tau) < 1$  zeitlich antikorrelierte Intensitäten kennzeichnet.

Desweiteren spricht man von *Photonenbunching* falls  $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$  und von *Photonenantibunching* falls  $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$  für  $\tau \neq 0$ . Bei Photonbunching treten Photonen häufig paarweise auf während bei Photonenantibunching Photonenpaare unterdurchschnittlich häufig sind (im Vergleich zu unkorrelierten, also poissonverteilten Photonen).

Wird das elektromagnetische Feld nicht klassisch sondern im Rahmen der Quantenmechanik behandelt (vgl. zweite Quantisierung), muss die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung als Funktion von Feldoperatoren ausgedrückt werden. Dies wird in Abschnitt 1.3.5 behandelt. Die Messung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung erfolgt i.d.R. mit einem Hanbury Brown-Twiss Aufbau, siehe Abschnitt 1.4.1 zur Intensitätsinterferometrie.

## 1.3 Theoretische Grundlagen der Quantenoptik

### 1.3.1 Elektromagnetisches Feld und zweite Quantisierung

**Klassische Elektrodynamik** Die Eigenschaften von Licht werden im klassischen Regime durch die MAXWELGLEICHUNGEN (hier im SI-Einheitensystem und in differentieller Form)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gaußsches Gesetz für Magnetfelder} \quad (10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gaußsches Gesetz für elektrische Felder} \quad (10b)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz} \quad (10c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad \text{Amperesches Durchflutungsgesetz} \quad (10d)$$

bestimmt. Aus der Divergenzfreiheit des  $\mathbf{B}$ -Feldes folgt die Existenz eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Eingesetzt in das Induktionsgesetz folgt die Rotationsfreiheit von  $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}$ , also  $\nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0$ , und damit die Existenz eines skalaren Potentials  $\phi$  mit  $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla\phi$ . Damit lässt sich schreiben

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} \quad (11a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11b)$$

Unter Ausnutzung der *Eichfreiheit* lässt sich

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\phi} = 0 \quad (\text{Lorenzgleichung}) \quad (12)$$

fordern. Dann lassen sich die inhomogenen Maxwellgleichungen (Amperesches Durchflutungsgesetz und Gaußsches Gesetz für elektrische Felder) in die folgende Form bringen:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \frac{\phi}{c} - \Delta \frac{\phi}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rho \quad (13a)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (13b)$$

mit der Stromflussdichte  $\mathbf{j}$  und der Ladungsdichte  $\rho$  sowie  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ . Mit der Definition der *Viererstromdichte*

$$j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}) \quad (14)$$

und dem *Viererpotential*

$$A^\mu \equiv \left( \frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (15)$$

sowie dem D'ALEMBERTOPERATOR

$$\square := \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \quad (16)$$

(Einsteinsche Summenkonvention!) lassen sich die inhomogenen Maxwellgleichungen sehr elegant formulieren:

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (17)$$

Man beachte, dass die *homogenen Maxwellgleichungen* wegen (11a) automatisch erfüllt sind. Zur Eleganz der obigen Formulierung der Maxwellgleichungen kommt die wichtige Eigenschaft der *Lorentzinvarianz* hinzu. Gleichung (17) ist also forminvariant unter Lorentztransformationen.

Das Vektorpotential ist im Allgemeinen sowohl orts- als auch zeitabhängig,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ . Es lässt sich zeigen, dass sich die Zeitabhängigkeit abseparieren lässt, wenn man eine Zerlegung in die einzelnen *Moden*  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$  des Vektorpotentials vornimmt

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_i A_i(t) \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad (18)$$

wobei  $\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$ . Die Moden lassen sich so wählen, dass die folgenden Wellengleichungen erfüllt sind

$$\Delta \mathbf{u}_i + \frac{\omega_i^2}{c^2} \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (19a)$$

$$\partial_t^2 A_i + \omega_i^2 \cdot A_i = \frac{j_i}{\varepsilon_0} \quad (19b)$$

Damit entspricht die Zeitentwicklung jeder Mode (bestimmt durch Polarisation  $\mathbf{u}_i$  und Frequenz  $\omega_i$ ) der eines *getriebenen harmonischen Oszillators*. Lässt man für jede Mode ( $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ ) eine kontinuierliche Energie zu, führt dies zu einem divergierenden Energiebeitrag im Fall der Schwarzkörperstrahlung. Dieser als *Ultraviolett Katastrophe* (vgl. RAYLEIGH-JEANS-GESETZ) bezeichnete Effekt führte schließlich zur Lichtquantenhypothese. Diese erlaubt die Besetzung von Moden nur in diskreten Energieschritten  $\hbar\omega_i$ , den sog. *Photonen*, und beseitigt die unphysikalische Divergenz der Strahlungsenergie in einem Holraum.

Heute wissen wir, dass der Quantenharmonische Oszillator mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (20)$$

ein *diskretes* Spektrum aufweist. D.h. die stationären Zustände  $|n\rangle$  erfüllen die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (21)$$

Die oben angedeutete Analogie einzelner Moden zu *klassischen* harmonischen Oszillatoren lässt in Kombination mit der dargelegten Quantisierung der Energieniveaus eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators den Schluss zu, dass eine Quantisierung der elektromagnetischen Felder ebenfalls zu diskreten Besetzungszahlen einzelner Moden (i.e. Oszillatoren) führen wird.

**Feldquantisierung** Die Feldquantisierung ist Gegenstand der Quantenfeldtheorie (QFT). Im Rahmen der zweiten Quantisierung zur Beschreibung von Vielteilchenzuständen mit Hilfe quantisierter Felder werden die oben eingeführten Vorfaktoren der Moden  $A_i$  durch entsprechende (nicht-hermitesche) Leiteroperatoren  $a_i$  und  $a_i^\dagger$  ersetzt. Diese erfüllen die Kommutatorrelation

$$\left[ a_{k,\sigma_k}, a_{l,\sigma_l}^\dagger \right] = \delta_{k,l} \delta_{\sigma_k,\sigma_l} \quad \text{kurz} \quad \left[ a_i, a_j^\dagger \right] = \delta_{ij} \quad (22)$$

mit den Polarisationen  $\sigma_i$ . Wir fassen wie im klassischen Fall die Indices  $k$  ( $l$ ) (Frequenz) und  $\sigma_k$  ( $\sigma_l$ ) (Polarisation) zu einem Superindex  $i$  ( $j$ ) zusammen. Klassisch lässt sich zeigen, dass die elektromagnetische Feldenergie geschrieben werden kann als

$$E_{\text{klassisch}} = \frac{1}{2} \sum_i \hbar\omega_i (A_i A_i^* + A_i^* A_i) \quad (23)$$

Damit folgt im Rahmen der kanonischen Quantisierung

$$A_i \longrightarrow a_i \quad \text{bzw.} \quad A_i^* \longrightarrow a_i^\dagger \quad (24)$$

der Hamiltonian des Vektorpotentials zu

$$H_A = \frac{1}{2} \sum_i \hbar\omega_i (a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) = \sum_i \hbar\omega_i \left( a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

Damit bestätigt sich die im letzten Abschnitt geäußerte Vermutung, dass die quantenmechanische Formulierung strukturgleich zur formalen Beschreibung des Quantenharmonischen Oszillators ist.

Damit lassen sich die Zustände des Vektorpotentials mit den Leiteroperatoren manipulieren wie man es vom harmonischen Oszillator her kennt.

Sei  $|0_i\rangle$  der Vakuumzustand von Mode  $i$ , also  $a_i|0_i\rangle = 0$ . Dann lässt sich die Mode mit einer beliebigen Photonenzahl  $n_i$  besetzen

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left(a_i^\dagger\right)^{n_i} |0_i\rangle \quad (26)$$

Dies folgt sofort aus den Beziehungen

$$a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle \quad (27a)$$

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle \quad (27b)$$

der Leiteroperatoren. Die  $|n_i\rangle$  bilden eine ONB des zur Mode  $i$  gehörenden Hilbertraums  $\mathcal{H}_i = \text{span}\{|n_i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  und sind Eigenzustände zum *Besetzungszahloperator*  $N_i \equiv a_i^\dagger a_i$ , wobei  $N_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle$ .

Das gesamte Vektorpotential wird durch einen Zustand  $|\mathbf{n}\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \in \bigotimes_i \mathcal{H}_i$  beschrieben, der sich entsprechend durch

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left(a_i^\dagger\right)^{n_i} |\mathbf{0}\rangle \quad \text{mit} \quad |\mathbf{0}\rangle = |0, 0, \dots\rangle \quad (28)$$

erzeugen lässt. Mit Hilfe der oben eingeführten Erzeuger- und Vernichteroperatoren lassen sich alle wichtigen Feldgrößen ausdrücken. Im Speziellen folgt für den Operator des Vektorpotentials (im HEISENBERGBILD)

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_i \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_i}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} + a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i \quad (29)$$

und damit schließlich für die Operatoren des **B**- und **E**-Feldes

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = i \sum_i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i \quad (30)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = i \sum_i \mathbf{k}_i \times \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_i}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i \quad (31)$$

Im Gegensatz zu den Leiteroperatoren sind obige Feldoperatoren hermitesch und liefern damit physikalisch sinnvolle Eigenwerte. Weiter unten findet der Feldoperator des **E**-Feldes Verwendung bei der Berechnung nicht-klassischer Korrelationen zweiter Ordnung sowie der Charakterisierung von Lichtfeldern anhand ihrer Erwartungswerte des **E**-Feldes.

Zum Abschluss dieser kurzen Einführung in die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes sei angemerkt, dass

$$H_A |\mathbf{0}\rangle = \sum_i \hbar\omega_i \left( N_i + \frac{1}{2} \right) |\mathbf{0}\rangle = \sum_i \frac{1}{2} \hbar\omega_i |\mathbf{0}\rangle = E |\mathbf{0}\rangle \quad (32)$$

Wir erkennen hier zweierlei: Erstens besitzt jede Mode eine *Nullpunktenergie* (im Kontext einer Feldtheorie spricht man auch von *Vakuumenergie*). Diese existiert auch dann, wenn sich kein Photon in der besagten Mode aufhält. Außerdem divergiert die Gesamtenergie  $E$ , da selbst in beschränkten Volumina die Modenzahl unbeschränkt ist. Dennoch lässt sich mit gewissen Tricks die *Änderung* der Vakuumenergie bei Änderung der Volumengeometrie berechnen. Auf diese Weise lässt sich z.B. die *CASIMIRKRAFT* herleiten, die zwei leitende, planparallele Platten im Vakuum attraktiv beeinflusst.

Die hier beschriebene Darstellung des quantisierten elektromagnetischen Feldes durch (u.U. gemischte) Zustände im FOCKRAUM  $\mathcal{H} \equiv \bigotimes_i \mathcal{H}_i$  lässt verschiedene "Arten" von Licht zu, die nicht alle Entsprechungen in der klassischen Elektrodynamik besitzen. Im Folgenden sollen die drei wichtigsten Zustandstypen in  $\mathcal{H}$  anhand ihrer Photonenstatistik charakterisiert werden.

## 1.3.2 Thermisches Licht

Licht das von einem thermischen Strahler (im Idealfall einem Schwarzen Strahler) emittiert wird unterliegt dem PLANCKSCHEN STRAHLUNGSGESETZ

$$L_{\Omega\nu}^o(\nu, T) \cos(\beta) dA d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} \cos(\beta) dA d\nu d\Omega \quad (33)$$

mit der Raumwinkelabhängigkeit  $d\Omega$ , der Flächenabhängigkeit (der strahlenden Fläche)  $dA$  und der spektralen Abhängigkeit  $d\nu$ . Im thermischen Gleichgewicht absorbiert der Hohlraumstrahler genau soviel Energie pro Zeiteinheit wie er an das thermische Strahlungsfeld in seinem Inneren abgibt. Damit lässt sich die *spektrale Energiedichte* der Hohlraumstrahlung schreiben als

$$U_\nu^o(\nu, T) d\nu dV = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} d\nu dV \quad (34)$$

$U_\nu^o(\nu, T) d\nu dV$  bezeichnet also die Energie der Hohlraumstrahlung im Volumenelement  $dV$  und dem Frequenzintervall  $d\nu$ . Die Wahrscheinlichkeit Mode  $i$  mit  $n_i$  Photonen anzuregen ist dann durch die *Boltzmannverteilung* gegeben

$$P_i^{\text{thermisch}}(n_i) = C_i \cdot \exp\left(-\frac{E_i(n_i)}{k_B T}\right) \quad (35)$$

mit  $E_i(n_i) = \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)$  und einem passenden Normierungsfaktor  $C_i$ . Rechnung liefert

$$P_i^{\text{thermisch}}(n_i) = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{n_i \hbar\omega_i}{k_B T}\right) \quad (36)$$

Bei thermischem Licht handelt es also um einen *gemischten Zustand*, der durch einen *Dichteoperator*  $\rho$  (bzw. eine Dichtematrix  $\hat{\rho}$  nach Wahl einer Basis) beschrieben wird. Mit obiger Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Fockbasis  $\{|n_i\rangle\}$  ergibt sich für eine Mode  $i$

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{Z_i} \sum_{n_i} e^{-\beta E_i(n_i)} |n_i\rangle \langle n_i| = \frac{e^{-\beta H_i}}{Z_i} \quad (37)$$

mit der inversen Temperatur  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , dem Hamiltonian  $H_i = \hbar\omega_i \left(N_i + \frac{1}{2}\right)$  und der Zustandssumme  $Z_i = \text{Tr} \left[e^{-\beta H_i}\right]$ . Man findet nun den mittleren Wert der Photonenzahl in Mode  $i$  als Erwartungswert des Besetzungszahloperators:

$$\langle n_i \rangle \equiv \langle N_i \rangle_{\text{thermisch}} = \text{Tr} [\rho_i N_i] = \frac{1}{\exp(\beta \hbar\omega_i) - 1} = \sum_{n_i} n_i \cdot P_i^{\text{thermisch}}(n_i) \quad (38)$$

Damit ergibt sich schließlich die Wahrscheinlichkeit  $n_i$  Photonen in der  $i$ -ten Mode vorzufinden

$$P_i^{\text{thermisch}}(n_i; \langle n_i \rangle) = \frac{\langle n_i \rangle^{n_i}}{(\langle n_i \rangle + 1)^{n_i + 1}} \quad (39)$$

Damit lässt sich auch ein statistisches Maß für die Schwankungen der Photonenzahl angeben. Die *Varianz*  $\text{Var}(n_i) = (\Delta n_i)^2$  ergibt sich zu

$$\text{Var}(n_i) = \left\langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \right\rangle = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 \stackrel{\text{thermisch}}{=} \langle n_i \rangle^2 + \langle n_i \rangle \quad (40)$$

und für die *relative Varianz* folgt

$$\left. \frac{\text{Var}(n_i)}{\langle n_i \rangle^2} \right|_{\text{thermisch}} = 1 + \frac{1}{\langle n_i \rangle} \xrightarrow{\langle n_i \rangle \rightarrow \infty} 1 \quad (41)$$

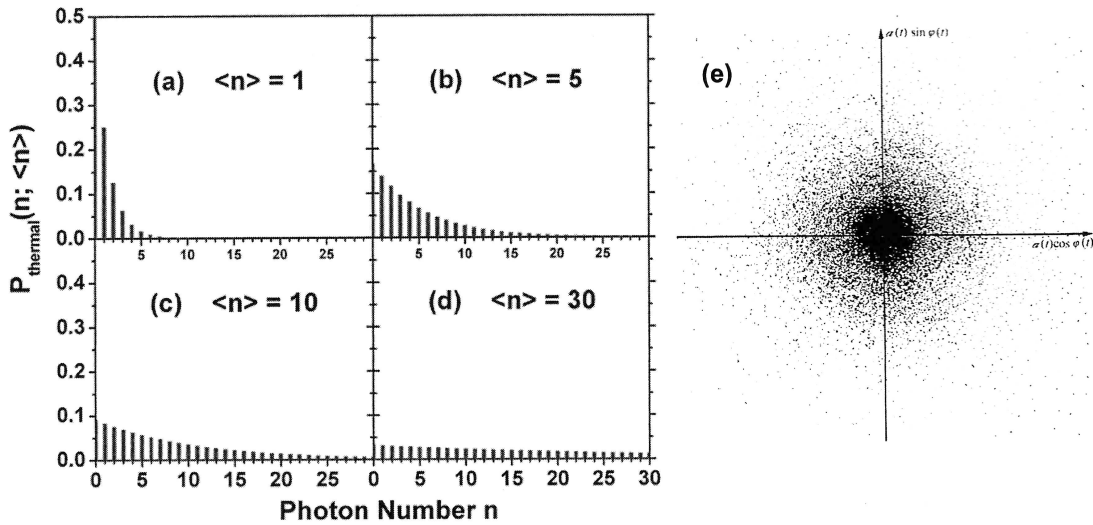


ABBILDUNG 2 (Farbe online) : (a)-(b): Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_i^{\text{thermisch}}(n_i; \langle n_i \rangle)$  für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt deutlich das ‐Auseinanderlaufen‐ der Verteilung bei steigender Photonenzahl. Dies ist dem *Photonenbunching* zuzuschreiben (e): Statistische Verteilung der Amplitude  $a(t)$  des **E**-Feldes und seiner Phase  $\varphi(t)$ . Während die Phase offensichtlich gleichverteilt ist gehorcht die Statistik der Amplitude einer Gaußverteilung.

Einige Beispiele für die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_i^{\text{thermisch}}(n_i; \langle n_i \rangle)$  ist in Abb. 2 (a)-(d) dargestellt. Man erkennt, dass eine leere Mode in allen Fällen der wahrscheinlichste Zustand ist. Da die Varianz (als Maß für die Breite der Verteilung) immer von der Größenordnung  $\langle n_i \rangle$  ist (vgl. relative Varianz oben), treten bei Einzelmessungen der Besetzungszahl der  $i$ -ten Mode große Schwankungen auf. Misst man auf Zeitskalen, die weitaus kleiner sind als die typischen Feldfluktuationen thermischen Lichts, offenbart sich die vergleichsweise große Varianz in einem gehäuften Auftreten von Photonen. Dieses sog. *Photonenbunching* führt zu positiven zeitlichen Korrelationen zweiter Ordnung (siehe unten); die Photonen gehorchen einer SUPER-POISSONVERTEILUNG. Im Gegensatz dazu beobachtet man auf der größeren Zeitskala typischer Feldfluktuationen keine Korrelationen zwischen dem Eintreffen von Photonen. Auf dieser nicht-kohärenten Zeitskala wird das Eintreffen der Photonen also durch eine POISSONVERTEILUNG beschrieben.

### 1.3.3 Kohärentes Licht: Glauber-Zustände

Die einfachste klassische Vorstellung von Licht ist die der kohärenten, ebenen elektromagnetischen Welle. Diese ergibt sich als eine der Vakuumlösungen der Wellengleichung

$$\square A^\mu = 0 \tag{42}$$

und zeichnet sich durch zeitlich scharf bestimmte Amplituden  $E(t, \mathbf{r})$ ,  $B(t, \mathbf{r})$  und Phasen  $\varphi(t, \mathbf{r})$  aus. Im Idealfall sind die Phasen zwischen beliebigen Raumzeitpunkten korreliert und man spricht von einer idealen ebenen Welle unbeschränkter zeitlicher und räumlicher Kohärenz.

Diese klassische Vorstellung von Licht kann im Rahmen der Quantenmechanik *nicht* realisiert werden. Möglich ist allenfalls eine ‐Bestapproximation‐ an den klassischen Fall scharfer Amplituden und Phasen. Diese Bestapproximation wird durch sog. *kohärente Zustände* oder auch GLAUBER-ZUSTÄNDE erreicht. Um die Unmöglichkeit der simultanen, exakten Bestimmung von Amplitude (und damit Besetzungszahl  $\langle N_i \rangle$ ) und Phase  $\varphi_i$  zu verstehen sei angemerkt, dass auch die Phase einem Operator entspricht. Der *Phasenoperator*  $\phi_i$  wird definiert als

$$a_i = \sqrt{N_i + 1} e^{i\phi_i} \tag{43}$$

ist aber i.A. nicht hermitesch. Es lassen sich allerdings hermitesche Operatoren  $\sin \phi_i$  und  $\cos \phi_i$  definieren. Diese werden als *observable Phasen* bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass Phase und Besetzungszahl kanonisch konjugiert sind

$$[N_i, \phi_i] = i\mathbf{1} \quad (44)$$

und weiter die Relationen  $[N_i, \cos \phi_i] = i \sin \phi_i$  und  $[N_i, \sin \phi_i] = i \cos \phi_i$  gelten. Betrachten wir die allgemeine HEISENBERGSCHES UNRSCHÄRFERELATION

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \Psi | [A, B] | \Psi \rangle| \quad (45)$$

für hermitesche Operatoren  $A$  und  $B$  so folgt für den Sinus der Phase

$$\Delta N_i \Delta \sin \phi_i \geq \frac{1}{2} |\langle \cos \phi_i \rangle| \quad (46)$$

Nehmen wir an, dass  $\langle \cos \phi_i \rangle \neq 0$  (was i.A. der Fall ist), so folgt die Unmöglichkeit Besetzungszahl (und damit die Feldstärke) und Phase simultan exakt zu messen. Die Optimierung hinsichtlich der obigen Unschärferelation führt auf die Glauber-Zustände  $|\alpha_i\rangle$ . Diese sind Eigenzustände zum Vernichter  $a_i$ , also

$$a_i |\alpha_i\rangle = \alpha_i |\alpha_i\rangle \quad (47)$$

mit  $\alpha_i = |\alpha_i| e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  da  $a_i \neq a_i^\dagger$ . Mit der Fockbasis  $\{|n_i\rangle\}$  finden wir die Entwicklung

$$|\alpha_i\rangle = \sum_{n_i} e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}} \cdot \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |n_i\rangle = \exp\left[-\frac{|\alpha_i|^2}{2} + \alpha_i a_i^\dagger\right] |0_i\rangle \quad (48)$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Zustände der Vorstellung einer klassischen, kohärenten, ebenen Welle am nächsten kommen wie sie z.B. ein stabilisierter und gefilterter (siehe Raumfilter) Laser erzeugt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Besetzungszahl von Mode  $i$  ergibt sich zu

$$P_i^{\text{kohärent}}(n_i) = |\langle n_i | \alpha_i \rangle|^2 = e^{-|\alpha_i|^2} \cdot \frac{|\alpha_i|^{2n}}{n_i!} \quad (49)$$

Dies ist eine POISSONVERTEILUNG, die das Auftreten selten und voneinander unabhängig eintretender Ereignisse beschreibt (vgl. Kernzerfälle). Der Erwartungswert des Besetzungszahloperators ergibt

$$\langle n_i \rangle \equiv \langle N_i \rangle_{\text{kohärent}} = \langle \alpha_i | a_i^\dagger a_i | \alpha_i \rangle = |\alpha_i|^2 \quad (50)$$

Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung schreiben als

$$P_i^{\text{kohärent}}(n_i; \langle n_i \rangle) = e^{-\langle n_i \rangle} \cdot \frac{\langle n_i \rangle^{n_i}}{n_i!} \quad (51)$$

Die Varianz berechnet sich zu

$$\text{Var}(n_i) = \langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \rangle = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 \stackrel{\text{kohärent}}{=} |\alpha_i|^2 = \langle n_i \rangle \quad (52)$$

Damit ergibt sich die relative Varianz

$$\left. \frac{\text{Var}(n_i)}{\langle n_i \rangle^2} \right|_{\text{kohärent}} = \frac{1}{\langle n_i \rangle} \xrightarrow{\langle n_i \rangle \rightarrow \infty} 0 \quad (53)$$

Einige Verteilungen zu unterschiedlichen Besetzungszahlen der Mode sind in Abb. 3 (a)-(d) abgebildet.

Da die Poissonstatistik unkorrelierte Ereignisse beschreibt, findet bei kohärenten Lichtzuständen, wie sie z.B. von Lasern näherungsweise emittiert werden, weder Photonbunching noch Photonantibunching statt. Das Eintreffen der Photonen gehorcht also den selben Gesetzen wie das

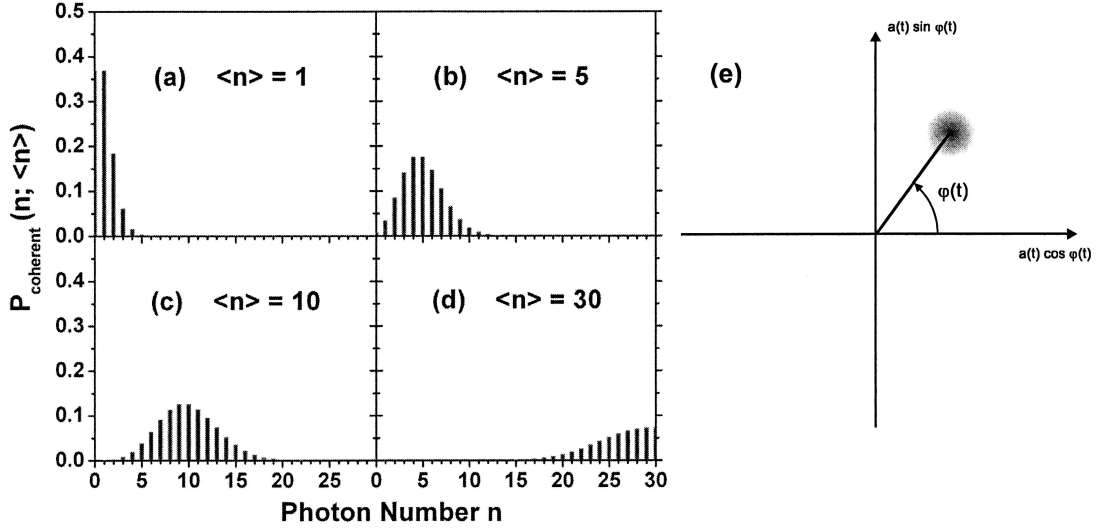


ABBILDUNG 3 (Farbe online) : (a)-(d): Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_i^{\text{klassisch}}(n_i; \langle n_i \rangle)$  für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt die Häufung der Zustände im Umfeld des Mittelwertes der Besetzungszahl. Für große Besetzungszahlen wird die Varianz im Vergleich zum Besetzungszahlquadrat vernachlässigbar. Dies entspricht dem klassischen Limes einer (nahezu) konstanten Amplitude. (e): Statistische Verteilung der Amplitude  $a(t)$  des  $\mathbf{E}$ -Feldes und seiner Phase  $\varphi(t)$ . Sowohl Phase als auch Amplitude sind in einem kleinen Bereich lokalisiert. Dies kennzeichnet den Zustand kleinster Amplituden-Phasen-Unschärfe und approximiert die klassische ebene Welle, die als Punkt in obigem Diagramm dargestellt würde.

Eintreten radioaktiver Zerfälle. Neben der vergleichsweise scharfen Bestimmung von Phase und Amplitude lässt sich die Nähe zum klassischen Bild der ebenen Welle auch mit Hilfe des Feldoperators  $\mathbf{E}$  veranschaulichen. Berechnet man dessen Erwartungswert ergibt sich

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \langle \alpha_i | \mathbf{E} | \alpha_i \rangle = \langle \alpha_i | i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i | \alpha_i \rangle \quad (54)$$

$$= i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \left( \alpha_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - \alpha_i^* e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i \quad (55)$$

$$= -2 \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} |\alpha_i| \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t + \varphi) \cdot \mathbf{u}_i \quad (56)$$

für eine *einmodige* elektromagnetische Welle und  $\alpha_i = |\alpha_i| e^{i\varphi}$ . Der Erwartungswert des  $\mathbf{E}$ -Feldes verhält sich also genau so, wie man es klassisch erwarten würde. In Abb. 3 (e) ist die Verteilung von Amplitude  $a(t)$  und Phase  $\varphi(t)$  grafisch veranschaulicht.

### 1.3.4 Nicht-klassisches Licht: Fock-Zustände

Bisher wurden nur Lichtzustände betrachtet, die auch im Rahmen der klassischen Elektrodynamik und statistischen Physik beschrieben werden können. Das auch Andere existieren lässt sich leicht demonstrieren. Betrachten wir die Fockzustände  $\{|n_i\rangle\}$  und berechnen den Erwartungswert des  $\mathbf{E}$ -Feldes der Mode  $i$ , so folgt

$$\langle n_i | \mathbf{E}_i | n_i \rangle = \langle n_i | i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i | n_i \rangle = 0 \quad (57)$$

da  $\langle n_i | a_i | n_i \rangle = \langle n_i | a_i^\dagger | n_i \rangle = 0$ . Während im Fall der Glauber-Zustände der Erwartungswert des  $\mathbf{E}$ -Feldes den klassischen Erwartungen entspricht, ist dies bei Fock-Zuständen nicht mehr der Fall.

Es gilt zu beachten, dass obiges Ergebnis mitnichten bedeutet, dass *kein*  $\mathbf{E}$ -Feld messbar wäre, sondern dass bei einer Vielzahl von Messungen am selben Ort zur selben Zeit das elektrische

Feld jede beliebige Phase mit gleicher relativer Häufigkeit annehmen wird. Das Verschwinden des Erwartungswerts lässt sich also auf die vollständig unbestimmte Phase  $\varphi(t)$  bei zeitgleich scharf bestimmter Amplitude  $a(t)$  zurückführen. Die scharf bestimmte Amplitude ist Folge der scharf bestimmten Besetzungszahl der Mode während die unbestimmte Phase auf Grund der im letzten Abschnitt beschriebenen Unschärferelation zwischen Besetzungszahloperator  $N_i$  und Sinus bzw. Cosinus des Phasenoperators  $\phi_i$  zustandekommt.

In Abb. 4 (e) ist diese Unschärfebeziehung grafisch dargestellt.

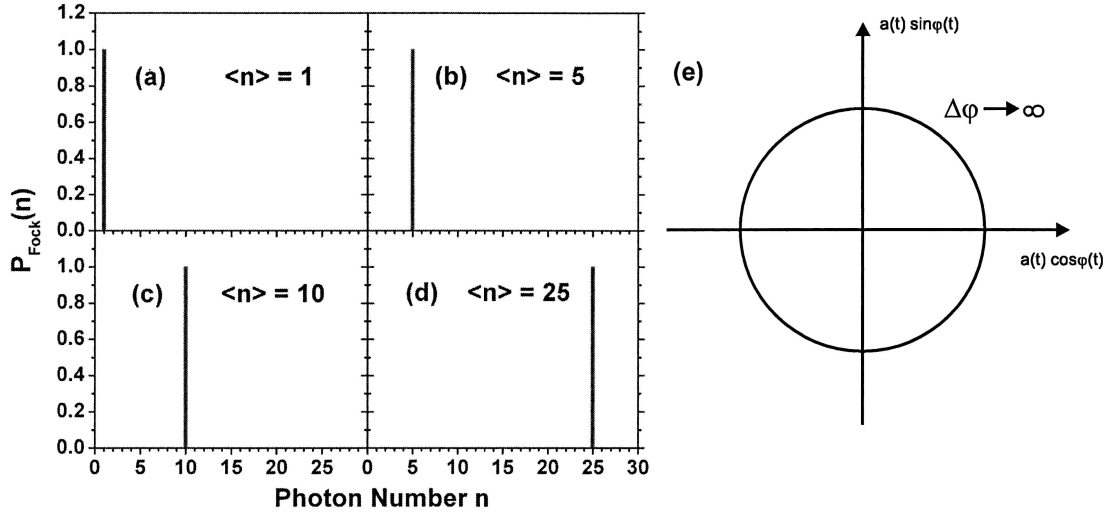


ABBILDUNG 4 (Farbe online) : (a)-(b): Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_i^{\text{Fock}}(n_i; \langle n_i \rangle)$  für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt die scharf bestimmte Besetzungszahl. Solche Lichtzustände besitzen kein klassisches Analogon. (e): Statistische Verteilung der Amplitude  $a(t)$  des  $\mathbf{E}$ -Feldes und seiner Phase  $\varphi(t)$ . Während die Amplitude (und damit die Besetzungszahl) scharf bestimmt ist, sind die gemessenen Phasen über alle Winkel verteilt. Die Mittelung des  $\mathbf{E}$ -Feldvektors über verschiedene Realisierungen des Ensembles verschwindet folglich.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Besetzungszahl eines Fock-Zustandes  $|m_i\rangle$  ergibt sich trivial zu

$$P_i^{\text{Fock}}(n_i) = |\langle n_i | m_i \rangle|^2 = \delta_{n_i, m_i} \quad (58)$$

Der Erwartungswert ist

$$\langle n_i \rangle \equiv \langle N_i \rangle_{\text{Fock}} = \langle m_i | a_i^\dagger a_i | m_i \rangle = m_i \quad (59)$$

und damit folgt sofort für die Varianz

$$\text{Var}(n_i) = \langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \rangle = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 \stackrel{\text{Fock}}{=} 0 \quad (60)$$

Damit ergibt sich die relative Varianz

$$\left. \frac{\text{Var}(n_i)}{\langle n_i \rangle^2} \right|_{\text{Fock}} = 0 \quad (61)$$

Einige Verteilungen zu unterschiedlichen Besetzungszahlen der Mode sind in Abb. 4 (a)-(d) abgebildet.

Während die Realisierung thermischer und kohärenter Lichtquellen experimentell kein Problem darstellt, stellt sich die Frage nach der Implementierung einer nicht-klassischen Lichtquelle deren emittiertes Strahlungsfeld durch Fock-Zustände beschrieben werden kann. Auf Grund des im vorherigen Abschnitt beschriebenen Photonenantibunchings werden solche Lichtquellen als *Einzelphotonenquellen* bezeichnet.

**NV-Zentren in Diamant** Eine mögliche Implementierung von Einzelphotonenquellen nutzt die Fluoreszenz sog. Stickstoff-Fehlstellen-Zentren in Diamantgittern (*nitrogen-vacancy center*, NV-Zentrum). In Ref. [3] wurde mit Hilfe eines Hanbury Brown-Twiss Aufbau (Intensitätsinterferometer) die Photonstatistik von NV-Zentren in Diamant untersucht. Die Experimente legen nahe, dass einzelne Fehlstellen bei Raumtemperatur als Einzelphotonenquellen in Frage kommen. Da vor allem für die Quanteninformationsverarbeitung (erwähnt sei hier die Quantenkryptographie) die kontrollierte Emission einzelner Photonen als Träger von Qubits von großer Bedeutung ist, stellen vor allem die unkomplizierte Handhabung (bei Raumtemperatur) sowie konstante Intensitäten (kein Ausbleichen wie bei Farbstoffen) Gründe dar, die Eigenschaften solcher Fehlstellen detailliert zu untersuchen.

Die Struktur einer NV-Fehlstelle ist schematisch in Abb. 5 (links) dargestellt. Das kubisch-flächenzentrierte Diamantgitter besitzt eine 2-atomige Basis aus C-Atomen die kovalent an jeweils vier Nachbaratome gebunden sind. Dabei bildet sich eine tetraederförmige Bindungsstruktur um jedes Kohlenstoffatom aus. Ein NV-Zentrum besteht aus einem N-Atom anstelle eines C-Atoms und einer benachbarten Vakanz. Solche Fehlstellen können entweder natürlich auftreten oder (mehr oder weniger) gezielt in den Kristall eingebracht werden. Dafür werden Vakanz durch hochenergetischen Elektronenbeschuss in gewünschter Dichte erzeugt. Anschließend wird der Kristall im Vakuum unter hohen Temperaturen mit Stickstoff angereichert.

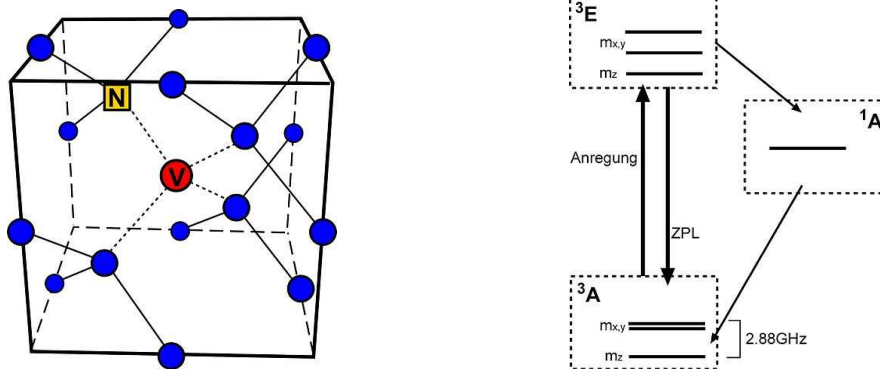


ABBILDUNG 5 (Farbe online) : Links: Atomare Struktur einer NV-Fehlstelle im Diamantgitter (Quelle: [4]). An zwei benachbarten Stellen im Gitter fehlen die C-Atome; eines wird durch ein N-Atom ersetzt. Rechts: Elektronisches Levelschema einer solchen NV-Fehlstelle (Quelle: [4]). Es handelt sich um ein 3-Niveau-System mit zwei Triplet-Zuständen  ${}^3E$  und  ${}^3A$  die jeweils auf Grund der Spin-Bahn-Wechselwirkung in 3 bzw. 2 Unterniveaus aufgespalten werden.

Die dem NV-Zentrum zur Verfügung stehenden Elektronen stammen von den benachbarten Kohlenstoffatomen (3) sowie dem Stickstoffatom (2); man beachte dass Stickstoff (im Gegensatz zu Kohlenstoff) 5-wertig ist. Die 5 Elektronen können verschiedene Niveaus besetzen und führen zu einem *ungeladenen* NV-Zentrum ( $[NV]^0$ ). Mit Experimenten zur Elektronenspinresonanz kommt man aber zu dem Schluss, dass es sich um eine gerade Anzahl von Elektronen handeln muss. Heute wird daher meist ein Modell mit 6 Elektronen zu Rate gezogen von denen eines als Donatorelektron aus der Umgebung der Fehlstelle stammt. Solche NV-Zentren sind negativ geladen ( $[NV]^-$ ) und stellen die Mehrheit der beobachteten Fehlstellen dar.

Das Levelschema des NV-Zentrums ist in Abb. 5 (rechts) dargestellt. Es besteht aus dem Triplet-Grundzustand  ${}^3A$  sowie einem angeregten Triplet-Zustand  ${}^3E$ . Der Übergang  ${}^3A \leftrightarrow {}^3E$  ist für die Photolumineszenz des Zentrums verantwortlich und führt zur Emission einzelner Photonen. Der Singulett-Zustand  ${}^1A$  gilt als metastabil und führt zu *Bunching* für  $t > \tau_c$  wobei  $\tau_c$  die Lebensdauer des angeregten Zustandes  ${}^3E$  bezeichnet. Die Spin-Bahn-Kopplung führt zu einer Aufspaltung der der Triplet-Systeme in Unterniveaus. Die Entartung wird aber vollständig erst durch den Zeeman-Effekt, also nach Anlegen eines externen Magnetfeldes aufgehoben. Da bei Raumtemperatur Phononmoden im Diamantgitter thermisch besetzt werden, können diese auch bei optischen Übergängen des NV-Zentrums einkoppeln. Dies führt zu einer Verbreiterung der

Übergangslinien und erschwert die Auflösung der Feinstruktur.

Da ein einzelnes NV-Zentrum niemals zwei Photonen zugleich emittieren kann und nach einer Emission eine gewisse Zeit bis zur erneuten Anregung vergeht, kann das emittierte Licht durch Fock-Zustände  $|1\rangle$  beschrieben werden. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, erlaubt der  $\tau = 0$ -Wert der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung zu entscheiden, ob ein einzelnes NV-Zentrum oder eine ganze (nicht aufgelöste) Gruppe Gegenstand der Untersuchung ist. Falls  $m$  nicht aufgelöste Fehlstellen zum Photonenstrom beitragen folgt nämlich  $g^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{m}$ .

### 1.3.5 Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung

Wie in Abschnitt 1.2.1 eingeführt ist die klassische Korrelationsfunktion zweiter Ordnung gegeben durch

$$g_{\text{kl}}^{(2)}(\tau) := \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (62)$$

wobei  $I(t) \propto |E(t)|^2$  ausgenutzt wurde. In Abschnitt 1.3.1 wurde der elektrische Feldstärkeoperator für Mode  $i$  eingeführt

$$\mathbf{E}_i(t, \mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \left( a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} - a_i^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \right) \mathbf{u}_i \equiv \hat{E}_i(t) \mathbf{u}_i + \hat{E}_i^\dagger(t) \mathbf{u}_i \quad (63)$$

mit  $\hat{E}_i(t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_i}{V}} \cdot a_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}$ . Beachtet man noch die Kommutatorrelationen der Leiteroperatoren lässt sich die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für den quantenmechanischen Fall in die Form

$$g_{\text{qm}}^{(2)}(\tau) := \frac{\langle \hat{E}_i^\dagger(t) \hat{E}_i^\dagger(t+\tau) \hat{E}_i(t+\tau) \hat{E}_i(t) \rangle}{\langle \hat{E}_i^\dagger(t) \hat{E}_i(t) \rangle^2} \quad (64)$$

bringen. Für  $\tau \rightarrow 0$  folgt

$$g_{\text{qm}}^{(2)}(0) = \frac{\langle a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_i \rangle}{\langle a_i^\dagger a_i \rangle^2} = \frac{\langle N_i(N_i - 1) \rangle}{\langle N_i \rangle^2} = \frac{\langle N_i^2 \rangle - \langle N_i \rangle}{\langle N_i \rangle^2} = 1 + \frac{(\Delta N_i)^2 - \langle N_i \rangle}{\langle N_i \rangle^2} \quad (65)$$

Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung normiert die Wahrscheinlichkeit zwei Photonen zur selben Zeit zu detektieren mit der Wahrscheinlichkeit das selbe Ereignis bei einer kohärenten Photonenquelle zu messen. Sie ist also ein Maß dafür, ob Photonen gehäuft paarweise ( $g_{\text{qm}}^{(2)}(0) > 1$ ) oder gehäuft *nicht* paarweise ( $g_{\text{qm}}^{(2)}(0) < 1$ ) auftreten.

Wir hatten in den vorherigen Abschnitten die Varianzen  $(\Delta N_i)^2 = \text{Var}(n_i)$  des Besetzungszahloperators berechnet. Zusammen mit dessen Erwartungswerten lassen sich für die drei untersuchten Zustandsarten die Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung für  $\tau = 0$  angeben:

$$\text{Var}(n_i) |_{\text{thermisch}} = \langle n_i \rangle^2 + \langle n_i \rangle \quad \Rightarrow \quad g_{\text{qm}}^{(2)}(0) = 2 \quad (66a)$$

$$\text{Var}(n_i) |_{\text{kohärent}} = \langle n_i \rangle \quad \Rightarrow \quad g_{\text{qm}}^{(2)}(0) = 1 \quad (66b)$$

$$\text{Var}(n_i) |_{\text{Fock}} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\text{qm}}^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{m_i} \quad \text{mit } m_i \in \mathbb{N} \quad (66c)$$

Die Korrelationsfunktionen  $g^{(2)}(\tau)$  sind in Abb. 6 (a) qualitativ dargestellt. Die Werte für  $\tau = 0$  entsprechen den zuvor Ausgerechneten. Man erkennt das Folgende:

- **Thermisches Licht** weist für Verzögerungszeiten  $\tau < \tau_{\text{coh}}$  eine Korrelationsfunktion größer 1 auf, also  $g^{(2)}(\tau) > 1$ . Dies entspricht dem schon besprochenen *Bunching* der Photonen auf kurzen Zeitskalen  $\tau \sim \tau_{\text{coh}}$  mit der Kohärenzzeit  $\tau_{\text{coh}}$ . Für diese Zeitskalen gehorchen die Detektionszeitpunkte einer Super-Poissonstatistik. Auf größeren Zeitskalen  $\tau \gg \tau_{\text{coh}}$  ist

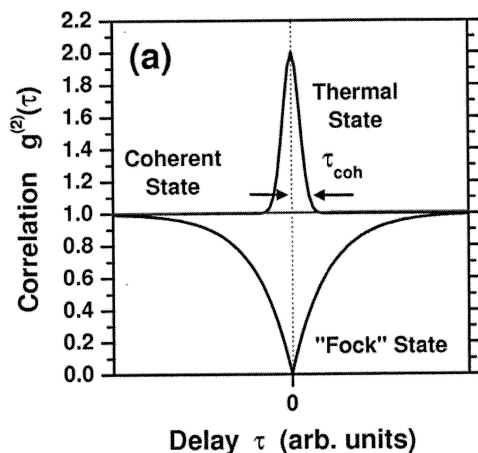


ABBILDUNG 6 (Farbe online) : Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$  für die drei vorgestellten Lichtzustände (Quelle: [2]). Thermische Emittoren gehorchen einer Super-Poissonstatistik für  $\tau \sim \tau_{coh}$  und zeigen *Bunching*. Kohärente Zustände zeichnen sich durch eine Poissonverteilung aus und weisen daher keine Korrelationen ( $g^{(2)}(\tau) \equiv 1$ ) zwischen den Photonen auf. Nicht-klassische Lichtquellen die durch Fock-Zustände beschrieben werden können zeigen für geringe Besetzungszahlen  $m_i$  ein ausgeprägtes *Antibunching*. Ihre Photonenstatistik wird durch eine Sub-Poissonverteilung beschrieben.

$g^{(2)}(\tau) \approx 1$  und die Photonen sind poissonverteilt. Man kann sowohl durch klassische als auch durch quantenmechanische Rechnung zeigen [5], dass für die Korrelation zweiter Ordnung

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2\frac{|\tau|}{\tau_{coh}}} \quad (67)$$

gilt, wenn man von einem durch Stoßverbreiterung hervorgerufenem Spektrum ausgeht (*Lorentzverteilung* für die Frequenzen und *Gaußverteilung* für die Amplituden).

- **Kohärentes Licht** wird durch eine konstante Kohärenzfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau) \equiv 1$  charakterisiert. Dies lässt sich sowohl im klassischen als auch im quantenmechanischen Bild herleiten [5]. Die kohärenten Zustände beschreiben ein Lichtfeld in dem keine Korrelationen zwischen Photonen vorherrschen. Deren Detektionszeiten werden daher durch eine Poissonverteilung beschrieben.
- **Nicht-klassisches Licht**, beschrieben durch die Fock-Zustände, zeichnet sich durch eine Korrelationsfunktion  $0 \leq g^{(2)}(\tau) < 1$  aus. Je kleiner der Wert der Korrelationsfunktion, desto unwahrscheinlicher ist das simultane Eintreffen zweier Photonen; auch *Antibunching* genannt. Im Idealfall einer Einzelphotonenquelle ist die untersuchte Mode mit nur einem Photon besetzt, also  $m_i = 1$  und die Korrelation  $g^{(2)}(0) = 0$  verschwindet völlig. Es ist auch intuitiv klar, dass ein Fockzustand mit nur einem Photon niemals eine simultane Messung zweier Photonen zulassen kann.

Für eine Einzelphotonenquelle muss also  $g_{qm}^{(2)}(0) < \frac{1}{2}$  gelten, denn dann ist  $m_i < 2$ .

Für Pumpraten  $\tau_{Pump}^{-1} \ll \tau_{Rad}^{-1}$  lässt sich durch Lösen einer Ratengleichung für die Besetzungswahrscheinlichkeit der Niveaus zeigen [5, 6], dass die Korrelation zweiter Ordnung gegeben ist durch

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - (1 - a)e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{eff}}} \quad (68)$$

wobei  $\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_{Pump}} + \frac{1}{\tau_{Rad}}$ , die effektive Zeitkonstante der Korrelation, bestimmt ist durch die Pumprate  $\tau_{Pump}^{-1}$  (einstellbar durch die Laserintensität) sowie die Zerfallsrate des angeregten Zustandes  $\tau_{Rad}^{-1}$ .  $a$  ist durch den Poisson-Untergrund des Signals gegeben zu  $a = 1 - \left(\frac{S}{S+B}\right)^2$ , wobei  $S$  ( $B$ ) die Countrate des Signals (Untergrunds) bezeichnet.

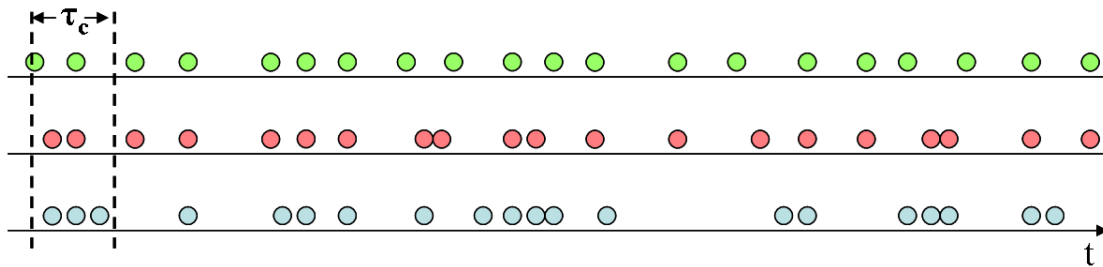


ABBILDUNG 7 (Farbe online) : Schematische Darstellung der Detektion einzelner Photonen im Laufe der Zeit (Quelle: [7]). (Grün): *Sub-Poissonverteilte* Photonen wie sie von Fock-Zuständen beschrieben werden (Einzelphotonenquellen). (Rot): *Poissonverteilte* Photonen wie sie von kohärenten Zuständen vorhergesagt werden (Laser). (Blau): *Super-Poissonverteilte* Photonen wie sie von gemischten Zuständen thermischen Lichts beschrieben werden (thermische Strahler).

Abb. 7 zeigt schematisch das zeitlich geordnete Auftreten der Photonen am Detektor. Die “grünen” Photonen beschreiben einen genäherten Einzelphotonenemitter und weisen damit Anti-bunching auf. Die “roten” Photonen sind poissonverteilt und beschreiben ein kohärentes Lichtfeld während die “blauen” Photonen offensichtlich Bunching zeigen und einen thermischen Strahler repräsentieren.

## 1.4 Experimentelle Grundlagen

### 1.4.1 Intensitätsinterferometrie

Während die Korrelation zweiter Ordnung von Radiosignalen schon länger bekannt und in der Radioastronomie auch eingesetzt wurde [8], waren Intensitätskorrelationen im Bereich des sichtbaren Lichts Gegenstand heftiger Kontroversen. Dies war vorallem der quantenmechanischen Sicht auf Lichtfelder geschuldet, da die Korrelation zwischen nicht wechselwirkenden Photonen schwerer zu akzeptieren ist, als durch Wellenphänomene hervorgerufene Korrelationen der Intensität. R. Hanbury Brown und R. Twiss wiesen experimentell nach [9], dass diese Korrelationen existieren und lieferten auch eine auf der klassischen Elektrodynamik beruhende Erklärung. Es sei angemerkt, dass der HBT-Effekt sich nicht nur auf Photonen beschränkt, sondern auch in der Teilchenphysik beobachtet wird. Die statistischen Eigenschaften hängen dabei kritisch vom untersuchten Teilchentyp ab. Während Bosonen vermehrt zeitgleich detektiert werden (Bunching) ist bei Fermionen das Gegenteil der Fall (Antibunching).

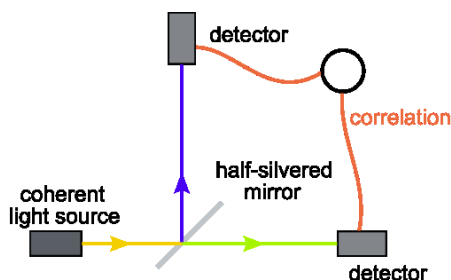


ABBILDUNG 8 (Farbe online) : Schematische Darstellung des Hanbury Brown-Twiss Interferometers (Quelle: [10]). Die zu untersuchende Strahlungsquelle wird über einen 50/50-Beamsplitter auf zwei empfindliche Detektoren geführt. In modernen Aufbauten kommen hier i.d.R. Avalanche-Photodioden (APDs) zum Einsatz. Die Zeitdifferenzen zwischen einzelnen Ereignissen werden von einem Time-to-Amplitude-Konverter (TAC) in Spannungspulse konvertiert welche digitalisiert vom Korrelator statistisch ausgewertet werden.

In Abb. 8 ist der schematische Aufbau eines HBT-Interferometers dargestellt. Die zu untersuchende Strahlung wird auf einen 50/50-Beamsplitter geführt und fällt von dort auf zwei Avalanche-Photodioden (APDs). Diese detektieren das Eintreffen einzelner Photonen und geben ein solches Ereignis als Spannungspuls aus. Ein Time-to-Amplitude-Konverter (TAC) wandelt die Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen an beiden APDs in ein Spannungssignal um welches anschließend digitalisiert wird. Ein Korrelator berechnet aus vielen Ereignissen die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}$ . Diese erlaubt Rückschlüsse auf die Photonenquelle und die quantenmechanischen

Zustände, die das Lichtfeld adäquat beschreiben.

Oben wurde erwähnt, dass Hanbury Brown und Twiss eine Erklärung für den nach ihnen benannten Effekt im Rahmen der *klassischen Elektrodynamik* lieferten. Wir wollen im Folgenden anhand eines einfachen Beispiels zeigen, dass auch im klassischen Bild von Licht als Welle eine positive Korrelation der Intensitäten an zwei getrennten Detektoren vorhergesagt wird.

Sei eine elektromagnetische Welle an Detektor 1 durch  $\mathbf{E}_1(t) = \hat{\mathbf{E}} \cdot \sin(\omega t)$  beschrieben. Detektor 2 sei an einem anderen Ort platziert, sodass i.A. eine Phasenverschiebung zwischen beiden Detektoren auftritt, also  $\mathbf{E}_2(t) = \hat{\mathbf{E}} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Dann gilt für die Intensitäten

$$I_1 \propto \hat{E}^2 \sin^2(\omega t) \quad (69a)$$

$$I_2 \propto \hat{E}^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (69b)$$

und man erhält mit Hilfe von Additionstheoremen für die (nicht normierte) Korrelation

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{E}^2}{T} \int_0^T dt \sin^2(\omega t) \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{E}^4}{4} + \frac{\hat{E}^4}{8} \cos(2\varphi) > 0 \quad (70)$$

Unabhängig vom Abstand (und damit  $\varphi$ ) findet man also eine positive Korrelation zweiter Ordnung.

### 1.4.2 Immersionsmikroskopie

Das Auflösungsvermögen optischer Mikroskope wird entscheidend von der Menge des vom Objektiv aufgefangenen und vom Objekt ausgehenden Lichtes bestimmt. Betrachtet man das Objekt als Beugungsgitter, so lässt sich dies auch im Sinne der ABBE'SCHEN THEORIE verstehen. Mikroskope mit hohen Auflösungen fangen möglichst viele Beugungsordnungen auf. Ein Maß für die Fähigkeit vom Objekt ausgehende Beugungsordnungen der Optik des Mikroskops zuzuführen ist die *Numerische Apertur* (NA). Sie ist gegeben durch

$$\text{NA} = n \cdot \sin \alpha \quad (71)$$

wobei  $\alpha$  den halben vom Objekt aus gesehene Öffnungswinkel des Lichtkegels bezeichnet, der auf die Objektivlinse fällt (siehe Abb. 9 (links)).  $n$  ist der Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Linse. Folglich kann die numerische Apertur bei Luftgefüllten zwischenräumen maximal den Wert 1 annehmen.

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops – also der minimale räumliche Abstand  $d_{\min}$  zweier Objekte, die nach der Abbildung noch getrennt wahrgenommen werden können – ist durch die Wellenlänge des Lichtes  $\lambda$  und die numerische Apertur des Objektivs NA bestimmt. Zieht man das RAYLEIGH-KRITERIUM für die Auflösbarkeit zweier getrennter Punkte heran, lässt sich für die Auflösung zeigen [11]

$$d_{\min} = \frac{1.22 \cdot \lambda}{2 \cdot \text{NA}} \quad (72)$$

Damit lässt sich die Auflösung durch kurzwelligeres Licht und Objektive höherer Apertur verbessern. Die Apertur lässt sich vergrößern, indem der Zwischenraum von Objektiv und Objekt mit einem *Immersionsöl* mit  $n > 1$  ( $n \approx 1.5$  typisch) gefüllt wird. Abb. 9 (links) zeigt die Folge eines solchen Öls für die Strahlenverläufe. Da der Brechungsindex des Öls auch die Wirkung der ersten Objektivlinse beeinflusst (die Brechung an der Außenfläche wird reduziert) muss diese an den Immersionsbetrieb angepasst sein. Mikroskope die auf den Betrieb mit Immersionsöl ausgelegt sind heißen *Immersionsmikroskope*.

### 1.4.3 Raumfilter

Kohärente Laserstrahlung führt bei verschmutzten Linsen zu Interferenzeffekten im Strahlengang. Schon kleinste Staubkörner auf der Optik können durch Beugung des Lichtes dessen Homogenität beeinträchtigen. Zudem besitzt ein Laserstrahl direkt nach dem Austritt aus dem aktiven

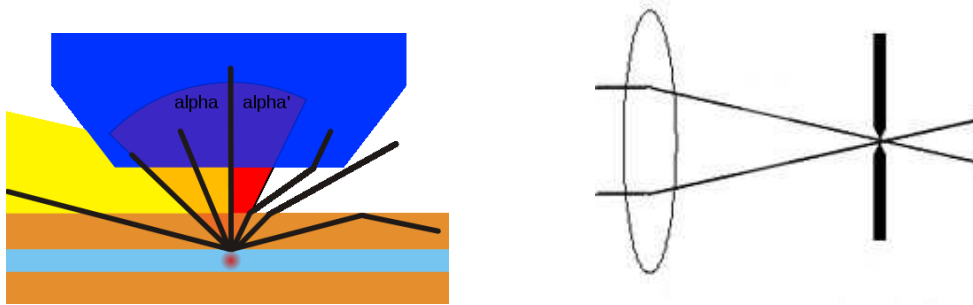


ABBILDUNG 9 (Farbe online) : Links: Objektive mit (links) und ohne (rechts) Immersionsöl zwischen Objektträger und Linse (Quelle: [12]). Durch die hohe Brechzahl des Immersionsöls ( $n > 1$ ) fängt das Objektive mehr Licht auf und erlaubt höhere Auflösungen. Rechts: Schematischer Aufbau eines Raumfilters (Quelle: [13]). Das kollimierte Licht wird durch eine Linse in der Fokalebene fouriertransformiert. Durch eine möglichst klein gewählte Blende (*Pinhole*) können ungewünschte Raumfrequenzen herausgefiltert werden. Auf diese Weise lassen sich ebene Wellen approximieren und von Verunreinigungen hervorgerufene Störungen des Strahlbündels beseitigen.

Medium mehr oder weniger starke Intensitätsschwankungen im Profil, die auf Abweichungen des Lasermediums zurückzuführen sind.

Oft möchte man mit einem Laser eine kohärente, ebene Welle approximieren. Durch die oben erwähnten Fehler ist der kollimierte Laserstrahl von dieser Idealvorstellung meist weit entfernt. Ein *Raumfilter* ermöglicht es die ungewünschten Intensitätsschwankungen im Profil des Strahls zu beseitigen und einen fast perfekten gaußschen Strahl herzustellen, der im Bereich um die optische Achse einer ebenen Welle sehr nahe kommt. Hierfür wird das parallele Strahlbündel (wie in Abb. 9 (rechts)) dargestellt) mit einem Objektive fokussiert. Nach den Regeln der *Fourieroptik* entspricht die Intensitätsverteilung in der Fokalebene der Fouriertransformierten der Intensitätsverteilung des kollimierten Strahls vor der Linse (Die Fokalebene wird daher auch *Fourierebene* genannt). Durch Filterung in der Fokalebene lassen sich also gezielt einzelne Fourierkomponenten und damit Raumfrequenzen der Intensität ausblenden. Rekollimiert man den Strahl durch eine weitere Linse hinter der Fokalebene erhält man ein fouriergefiltertes Bild des Eingangsstrahles.

Um eine möglichst gute Approximation einer ebenen Welle zu erhalten, müssen alle Fourierkomponenten bis auf die zentrale Beugungsordnung ausgeblendet werden. Dies erreicht man durch eine kreisförmige Blende mit einem Durchmesser im  $\mu\text{m}$ -Bereich (*Pinhole* genannt). Hohe Raumfrequenzen – wie sie etwa durch Beugung an Staubkörnern herforgerufen werden – werden weit von der Blendenöffnung entfernt blockiert. Niedrigere Raumfrequenzen treffen näher an der optischen Achse auf die Blende. Solche Beugungsmuster sind Folge der räumlich begrenzten Ausdehnung des Strahls (i.e. Beugung an einer Blende bzw. der Linse selbst). Werden sie entfernt wird der gaußsche Strahl zum ebenen Wellenfeld.

Bei der Wahl des Durchmessers des Pinholes gilt es die Qualität des Strahls nach der Filterung gegen seine Intensität abzuwägen. Je kleiner das Pinhole, desto näher kommt der Strahl einem ebenen Wellenfeld. Gleichzeitig nimmt seine Intensität aber drastisch ab. Es gilt also einen Kompromiss zwischen Qualität und Intensität zu finden.

In unserem Aufbau wird der Raumfilter im Strahlengang zwischen einem Immersionsmikroskop und dem Kollimator für die Einkopplung des Fluoreszenzlichts in eine Lichtleitfaser angebracht, um den Kontrast der Zählraten beim Scannen der NV-Zentren zu erhöhen. Die Rückabbildung des Pinholes über die Optik auf die Probe erlaubt es, räumlich eng begrenzte Bereiche der Probe zu erfassen und damit einen hohen Kontrast zwischen (poissonschem) Hintergrund und fluoreszierenden NV-Zentren zu erhalten. Ohne das Pinhole wäre das in die Faser eingekoppelte Licht einem im Vergleich zu einem einzelnen NV-Zentrums großen Bereich auf der Probe zuzuordnen, sodass kaum noch Eigenschaften einer Einzelphotonenquelle beobachtbar wären.

## 2 Auswertung

### 2.1 Thermisches Licht

Im folgenden Abschnitt soll die Photonenstatistik von thermischem (chaotischem) Licht aufgenommen werden. Ziel ist die Beobachtung von *Photonenbunching* – also die Tendenz der Photonen in Paaren aufzutreten.

**Versuchsdurchführung** Um die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung direkt messen zu können, verwenden wir einen *Hanbury Brown-Twiss Aufbau* – also ein Intensitätsinterferometer. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 10 dargestellt. Dieser Aufbau findet auch für die beiden folgenden Abschnitte des Versuches (kohärentes Licht und nicht-klassische Einzelphotonenquellen) Verwendung.

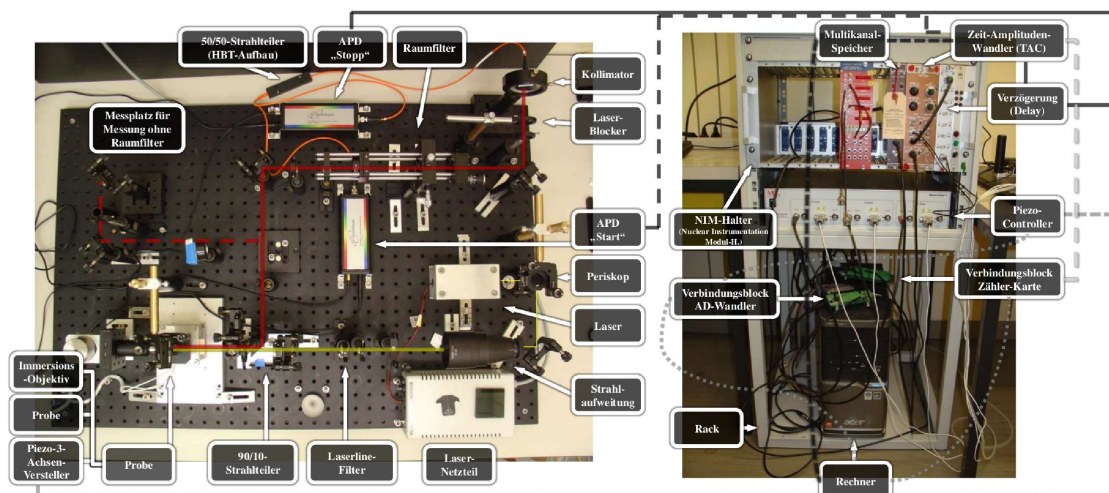


ABBILDUNG 10 (Farbe online) : Versuchsaufbau (Quelle: [6]). Das *Hanbury Brown-Twiss Interferometer* ist im linken Teil der Grafik abgebildet. Der rot-gestrichelte Pfad wird im ersten Versuchsteil zur Bestimmung der Photonenstatistik einer thermischen Lichtquelle benutzt. Für die Messungen mit kohärentem und nicht-klassischem Licht sind die durchgezogenen Pfade von Bedeutung.

Um die Photonenstatistik von thermischem Licht aufzunehmen, wird die Halterung in der Mitte des optischen Tisches (Abb. 10 links) mit einer gedimmten Glühlampe bestückt. Deren diffuses Licht fällt entlang des rot-gestrichelten Pfades auf einen Umlenkspiegel (der zur Justage eingesetzt wird) und wird mit einer Blende abgeschwächt. Anschließend wird die Strahlung über den Kollimator (der in der Grafik noch rechts oben angebracht ist) in die Lichtleitfaser eingekoppelt. Diese ist mit einem integrierten 50/50-Beamsplitter ausgerüstet und endet an den beiden APDs.

Trifft ein Photon auf die *Start-APD* löst diese den TAC (*Time-to-Amplitude Converter*) (Abb. 10 rechts) aus. Dieser fährt nun in einer fest eingestellten Rate eine Spannungsrampe hoch. Trifft innerhalb dieser Zeitspanne ein zweites Photon die *Stop-APD* bricht der TAC ab und gibt sein Spannungslevel an den MCA (*Multi Channel Analyser*) weiter. Dieser liefert dem PC die digitalisierte Information über die Spannungsamplitude und damit die Laufzeitdifferenz der beiden Photonen. Es gilt zu beachten, dass zwischen die *Stop-APD* und den TAC eine Verzögerungsschaltung (*Delay*) geschaltet wird, um auch Ereignisse statistisch verwerten zu können, bei denen das erste Photon auf die *Stop-APD* trifft und der TAC erst *danach* ausgelöst wird.

Am PC wird über einen möglichst langen Zeitraum eine Statistik über die absolute Zahl der detektierten Photonenpaare in Abhängigkeit von ihrer Laufzeitdifferenz aufgenommen. Diese liefert nach Normierung und Skalierung der  $x$ -Achse (Bin-Nummer des MCA) direkt die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung. Für die im Folgenden diskutierten Messungen an einer thermischen Lichtquelle wurden am TAC ein Zeitfenster von  $\Delta t = 50$  ns und am Delay eine (ungefähre) Verzögerung von  $\delta t = 25$  ns eingestellt. Der MCA arbeitete mit einer Auflösung von  $\Delta n = 8192$

Bins und die Statistik wurde einmal über  $\Delta T_1 = 4891$  s und ein zweitesmal über  $\Delta T_2 = 4293$  s aufgenommen.

**Auswertung** In Abb. 11 sind beide Messreihen vollständig abgebildet. Man erkennt bei beiden deutlich die Signatur einer Super-Poisson-Statistik. Aufgrund des ungenauen Delays sowie der Laufzeitunterschiede vom Beamsplitter zu den APDs liegt der Ursprung der Zeitachse nicht in der Mitte des Plots. Die Skalierung der  $x$ - und  $y$ -Achse wurde mit Hilfe der Fits in Abb. 12 durchgeführt.

Für diese Fits wurde der Theorie entsprechend eine Fitfunktion vom Typ

$$\mathcal{F}_{b,c,d}(n) = b \cdot \left(1 + e^{-2 \frac{|n-d|}{c}}\right) \quad (73)$$

angesetzt. Wir fitten dabei über die Bin-Nummer  $n$  und die Ereigniszahl  $N$  und müssen die Fitparameter für die physikalische Interpretation entsprechend umrechnen. Die Werte der Fitparameter wurden – wie oben schon erwähnt – nur zur Skalierung der Achsen in 11 herangezogen. Da beide Messungen nur statistisch unabhängige Ereignisse umfassen, ist es legitim beide Histogramme zu addieren um die statistischen Schwankungen zu reduzieren und effektiv auf eine Messung der Dauer  $\Delta T_1 + \Delta T_2 \approx 150$  min zurückgreifen zu können. Die addierten Messungen sind in Abb. 13 dargestellt. Die Skalierung der Skalen basieren auf dem Fit in Abb. 13 (unten).

**Gnuplot** liefert die Fit-Parameter  $b = 91.999 \pm 0.2361$ ,  $c = 32.1096 \pm 2.561$  und  $d = 6805.21 \pm 1.025$ . Eine Division der Ereigniszahlen durch  $b$  liefert die Normierung der Korrelationsfunktion auf 1 für  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Eine Verschiebung und Skalierung der Bin-Nummern  $n$  um  $-d$  bzw. mit  $\varepsilon = \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{50 \text{ ns}}{8192} \approx 6.1035 \cdot 10^{-3}$  ns liefert die Verzögerungszeiten und damit die Skala der  $y$ -Achse.

Gemäß Theorie ergibt sich die Kohärenzzeit der thermischen Strahlung zu

$$\tau_c = c \cdot \varepsilon \approx (0.196 \pm 0.016) \text{ ns} \quad (74)$$

und wir erhalten eine Kohärenzlänge von

$$l_c = \tau_c \cdot c_0 \approx (59 \pm 5) \text{ mm} \quad (75)$$

für die untersuchte thermische Strahlung. Wir schätzen noch die zu erwartende Größenordnung des Poisson-Levels (also den Wert des Fitparameters  $b$ ) ab. Es lässt sich zeigen, dass gilt

$$b_{\text{Poisson}} = \dot{N}_{\text{Start}} \dot{N}_{\text{Stop}} \cdot \varepsilon \cdot \Delta T \quad (76)$$

mit den Zählraten  $\dot{N}$  der APDs sowie der Messdauer  $\Delta T$ . Da nur  $\dot{N}_{\text{Start}}$  am PC ausgegeben wird, ziehen wir die (erfahrungsbasierte) Schätzung  $\dot{N}_{\text{Stop}} = 0.7 \cdot \dot{N}_{\text{Start}}$  heran und erhalten mit  $\dot{N}_{\text{Start}} \approx 60000 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = 9184$  s und  $\varepsilon = 6.1035 \cdot 10^{-3}$  ns die Abschätzung  $b_{\text{Poisson}} \approx 140$ . Ein Vergleich mit  $b \approx 92$  liefert zumindest in Hinblick auf die Größenordnung eine Übereinstimmung.

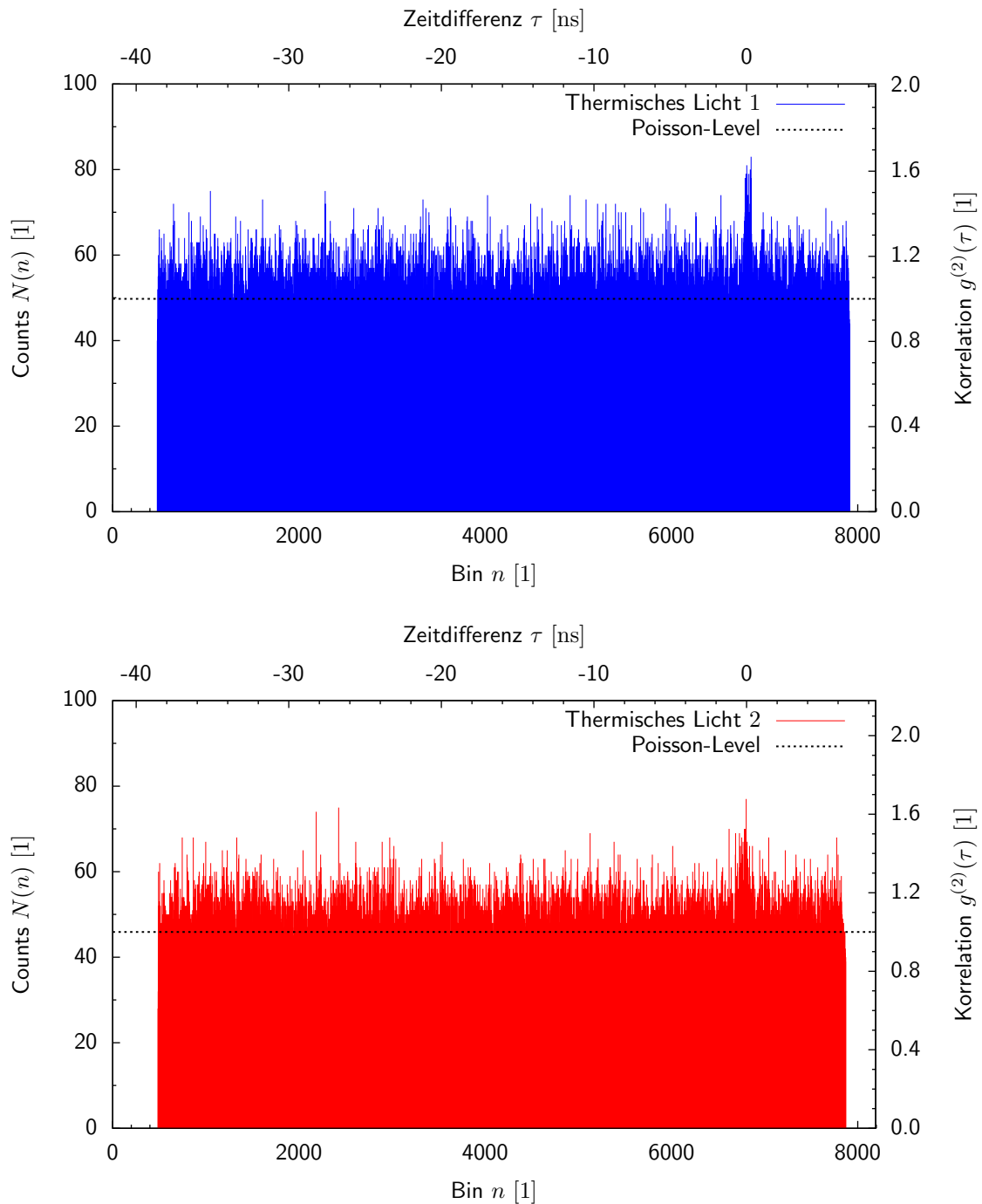


ABBILDUNG 11 (Farbe online) : *Oben*: Messung 1. *Unten*: Messung 2. Dargestellt wird die absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe der Fits  $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$  (siehe Abb. 12) ermittelt. Man erkennt das Photonbunching der thermischen Strahlung bei  $n \approx 6800$  bzw.  $\tau = 0$ .

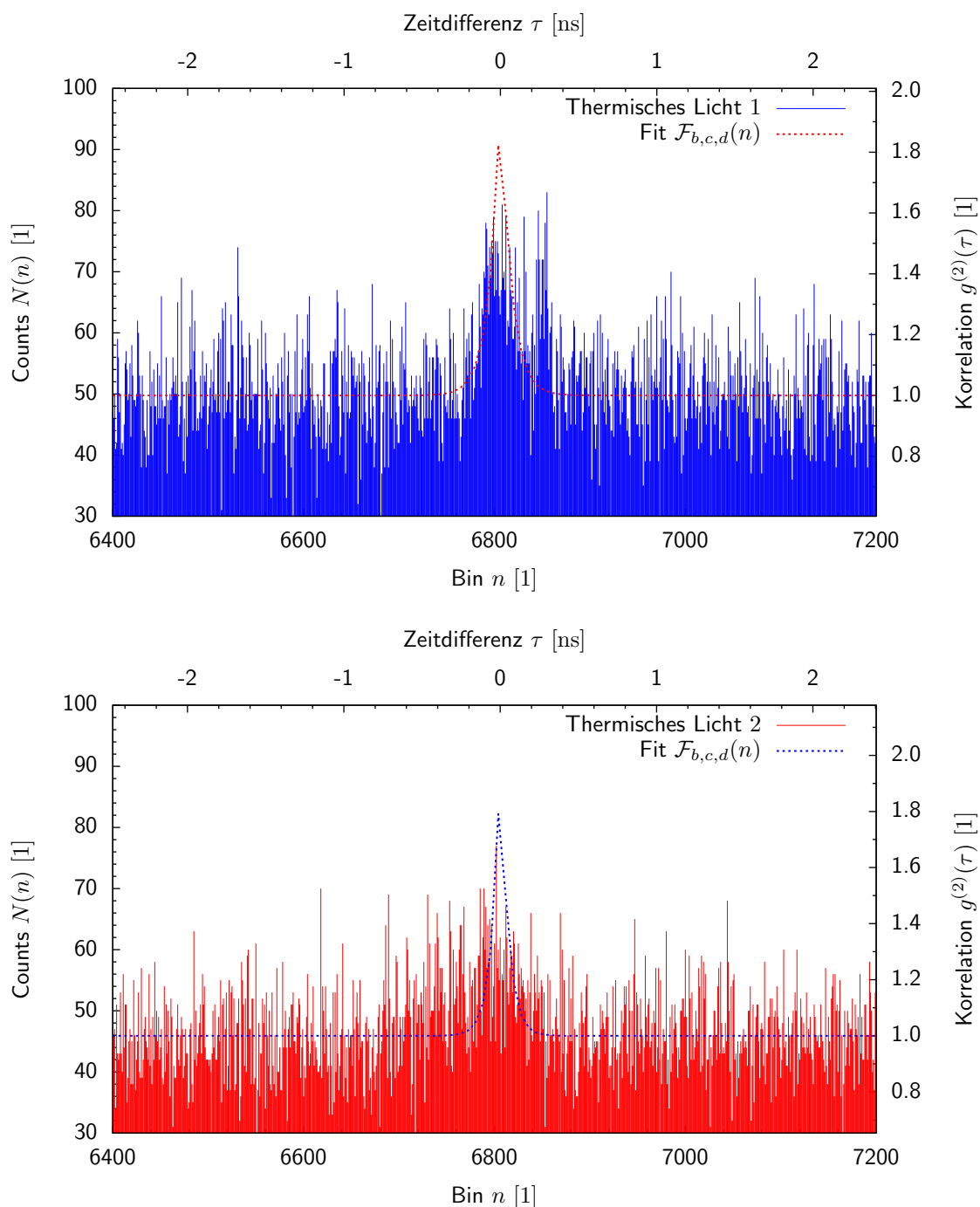


ABBILDUNG 12 (Farbe online) : *Oben*: Messung 1. *Unten*: Messung 2. Dargestellt wird die absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$  im Bereich  $6400 \leq n \leq 7200$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe der Fits  $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$  ermittelt. Man erkennt das Photonenbunching der thermischen Strahlung bei  $n \approx 6800$  bzw.  $\tau = 0$ .

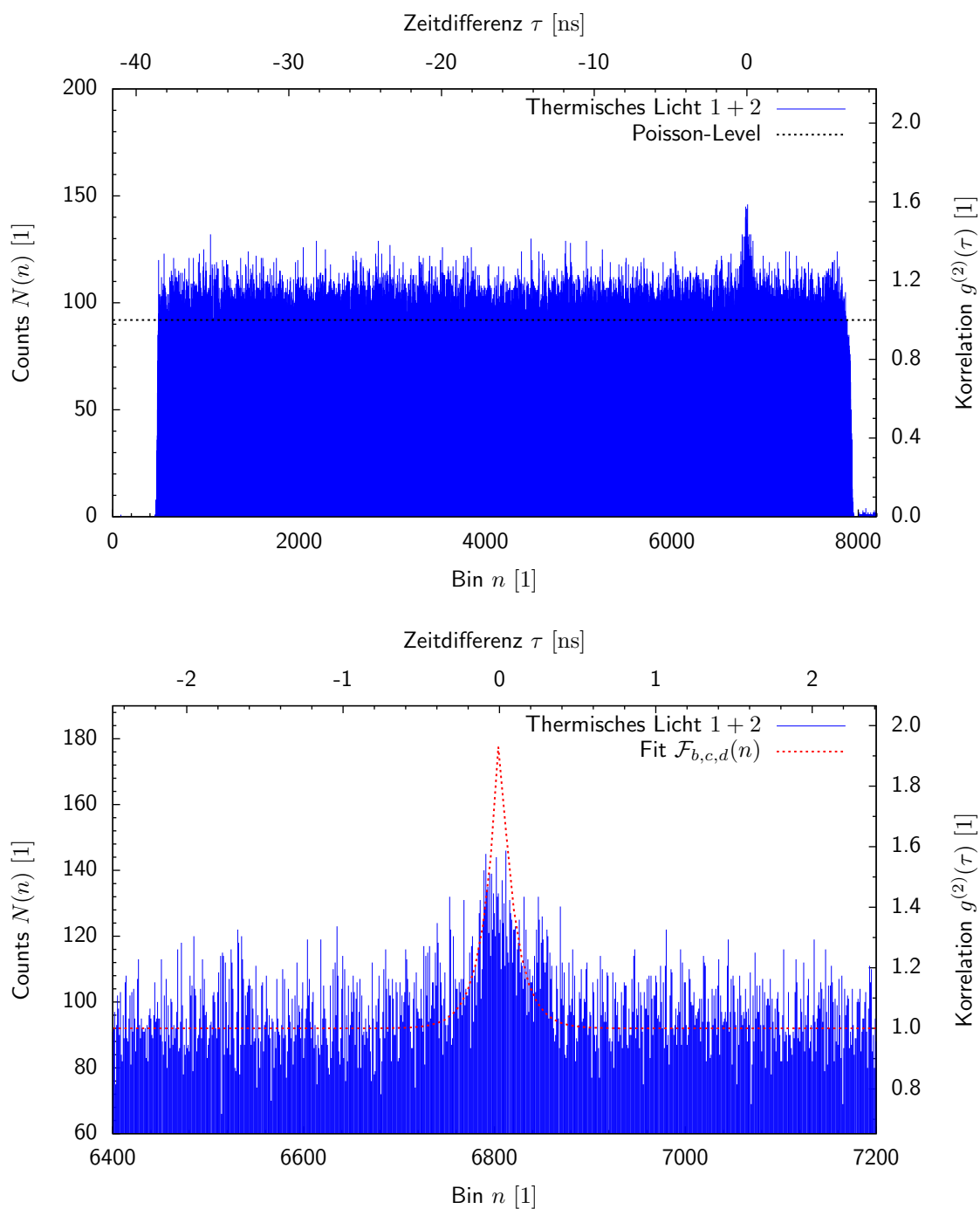


ABBILDUNG 13 (Farbe online) : *Oben:* Gesamter Messbereich. *Unten:* Ausschnitt für  $6400 \leq n \leq 7200$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 1 und 2 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe des Fits  $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$  (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenbunching der thermischen Strahlung mit  $g^{(2)}(0) \approx 2$  für den Fit bei  $n \approx 6800$  bzw.  $\tau = 0$ .

## 2.2 Kohärentes Licht

Im zweiten Versuchsteil soll die Photonstatistik von kohärentem Licht aufgenommen werden. Im Gegensatz zu den vorhergegangenen Messungen an thermischem Licht erwarten wir eine konstante Korrelationsfunktion zweiter Ordnung, da die Photonen poissonverteilt an den Detektoren auftreten.

**Versuchsdurchführung** Um den frequenzverdoppelten Laser ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) in den Kollimator einzukoppeln, wird das Immersionsobjektiv mit einem Spiegel abgedeckt. Der vom 90/10-Beamsplitter in Abb. 10 nach oben geworfene Strahl wird mit einem Spiegel nach links entlang des gestrichelten Pfades gelenkt und fällt nach Abschwächung durch die Irisblende auf den Kollimator. Die Auswertung erfolgt dann analog zum im ersten Abschnitt beschriebenen Vorgehen.

Für die im Folgenden diskutierte Messung an einer kohärenten Lichtquelle wurden am TAC ein Zeitfenster von  $\Delta t = 50 \text{ ns}$  und am Delay eine (ungefähre) Verzögerung von  $\delta t = 25 \text{ ns}$  eingestellt. Der MCA arbeitete mit einer Auflösung von  $\Delta n = 8192$  Bins und die Statistik wurde über  $\Delta T = 3047 \text{ s}$  aufgenommen.

**Auswertung** Da das eigentliche Ergebnis dieser Messreihe qualitativer Natur ist (es ist *kein* Bunching oder Antibunching zu erkennen) werden wir im Folgenden nur einen Größenordnungsvergleich mit dem zu erwartenden Poisson-Level durchführen.

Die vollständige Messreihe ist in Abb. 14 (oben) abgebildet. Da wir eine konstante Korrelationsfunktion zweiter Ordnung erwarten, setzen wir die Fitfunktion

$$\mathcal{F}_a(n) = a \quad (77)$$

an und erhalten  $a = 116.373$  als Fitparameter. Diesen nutzen wir zur Normierung der Ereigniszahlen um so die Skalierung der  $y$ -Achse in Abb. 14 zu erhalten. Da das Histogramm natürlich kein Charakteristikum aufweist, mit dessen Hilfe die Lage von  $\tau = 0$  für die Skalierung der  $x$ -Achse bestimmt werden könnte, greifen wir auf die im vorherigen Abschnitt bestimmte Skalierung zurück. Dies ist legitim, da die Einstellungen an TAC und MCA nicht verändert wurden.

Die Lage des Poisson-Levels in Abb. 14 (oben) scheint etwas zu niedrig angesetzt. Dies ist Folge der zu geringen Drucker- bzw. Bildschirmauflösung, die über 8000 Bins in der Horizontalen natürlich nicht detailgetreu wiedergeben kann. Um dies zu verdeutlichen ist in Abb. 14 (unten) ein horizontaler Ausschnitt geplottet. Hier erkennt man deutlich die statistischen Schwankungen um den gefitteten Poisson-Level.

Um abzuschätzen, ob der ermittelte Poisson-Level im Rahmen des Erwartbaren liegt, benutzen wir wieder den Zusammenhang

$$b_{\text{Poisson}} = 0.7 \cdot \dot{N}_{\text{Start}}^2 \cdot \varepsilon \cdot \Delta T \quad (78)$$

und erhalten mit den Werten  $\dot{N}_{\text{Start}} \approx 70000 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta T = 3047 \text{ s}$  und  $\varepsilon = 6.1035 \cdot 10^{-3} \text{ ns}$  die Abschätzung  $b_{\text{Poisson}} \approx 60$ . Ein Vergleich mit  $a \approx 116$  liefert wie zuvor in Hinblick auf die Größenordnung eine Übereinstimmung.

Offensichtlich war der für thermisches Licht gemessene Poisson-Level deutlich zu niedrig ( $b \approx 92$  vs.  $b_{\text{Poisson}} \approx 140$ ) während er im Fall kohärenten Lichtes deutlich zu hoch ausfällt ( $a \approx 116$  vs.  $b_{\text{Poisson}} \approx 60$ ). Dieses Resultat korreliert mit der Beobachtung, dass bei nahezu gleicher Countrate ( $\dot{N}_{\text{Start}} \approx 60000 \text{ s}^{-1}$  vs.  $\dot{N}_{\text{Start}} \approx 70000 \text{ s}^{-1}$ ) im Fall des kohärenten Lichtes nach deutlich kürzerer Messzeit eine höhere Zahl auswertbarer Photonpaare auftrat. Eine schlüssige Erklärung für diesen Effekt konnte nicht gefunden werden.

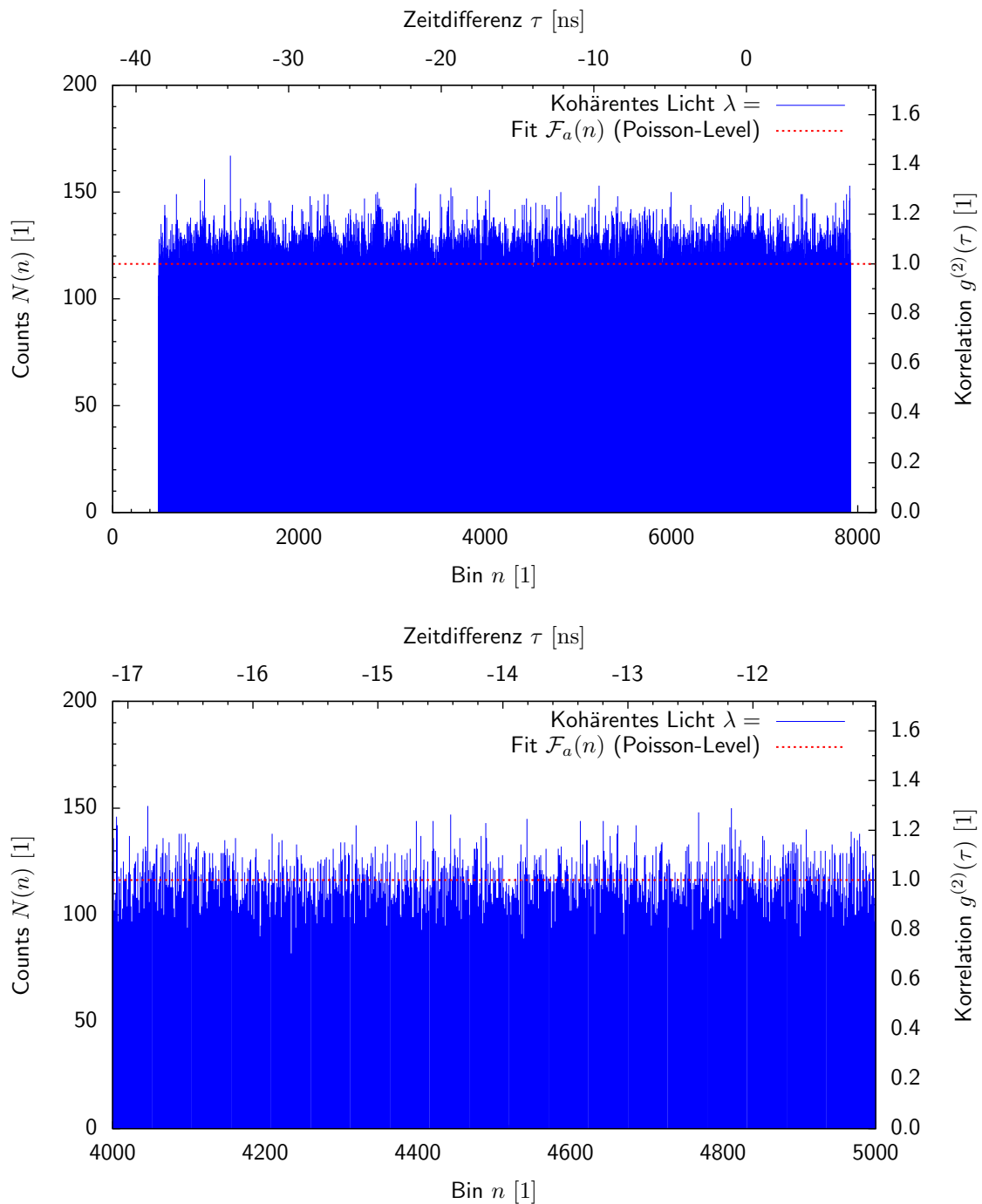


ABBILDUNG 14 (Farbe online) : *Oben*: Absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage der 1 wurde mit Hilfe des Fits  $\mathcal{F}_a(n) = a$  ermittelt. Die scheinbar zu niedrige Lage des horizontalen Fits ist der geringen Auflösung von Bildschirm bzw. Drucker geschuldet. *Unten*: Horizontaler Ausschnitt des Datensatzes mit  $4000 \leq n \leq 5000$ . Man erkennt hier deutlich die statistischen Schwankungen und die korrekte Lage des Fits  $\mathcal{F}_a(n)$ .

## 2.3 Nicht-klassisches Licht – NV-Zentren als Einzelphotonenquellen

Im letzten Teil des Versuches wird die Photonenstatistik von Stickstoff-Fehlstellen in Diamant (NV-Zentren) aufgenommen, die mit Hilfe eines Lasers zur Fluoreszenz angeregt werden. Da es sich bei NV-Zentren in erster Näherung um 2-Level Systeme handelt, erwarten wir Photonenantibunching.

**Versuchsdurchführung** Um die Photonenstatistik einer Einzelphotonenquelle aufnehmen zu können, muss ein einzelnes NV-Zentrum untersucht werden. Zu diesem Zweck benutzen wir ein Immersionsmikroskop, das in Abb. 10 links unten zu sehen ist. Der aufgeweitete und gefilterte Laser trifft durch den 90/10-Beamsplitter auf einen Umlenkspiegel und wird durch das Immersionsobjektiv auf die Probe fokussiert.

Diese ist fest mit einem 3-Achsen Piezo-Aktor verbunden, der über eine Software am PC gesteuert werden kann. Auf diese Weise ist sowohl die  $xy$ -Positionierung der Probe als auch eine hochempfindliche Justage des Fokus (i.e. der  $z$ -Position) möglich. Allerdings ist die Langzeitstabilität des Piezo-Tisches nicht optimal. Es ist daher zwingend nötig im Laufe langer Messreihen die Position nachzujustieren, da sonst das untersuchte NV-Zentrum defokussiert oder horizontal abdriftet.

Das Fluoreszenzlicht und die Reflexionen des Lasers folgen in Abb. 10 dem roten Pfad. Nach dem 90/10-Beamsplitter folgt ein weiterer Umlenkspiegel, der den Strahl auf den Raumfilter (eine Kombination aus zwei Linsen und einem Pinhole) wirft. Nach einem weiteren Spiegel folgt schließlich der Laserblocker. Dieser sorgt dafür, dass nur das Fluoreszenzlicht in die Faser einkoppelt und die poissonverteilten Photonen des Pumpasers die Statistik nicht verfälschen können.

Die Aufnahme der Statistik erfolgt analog zu den vorhergegangenen Messreihen. Für die Messungen an NV-Zentren wurde der TAC auf ein Zeitintervall von  $\Delta t = 200$  ns und das Delay auf  $\delta t = 100$  ns eingestellt. Der MCA arbeitete mit einer Auflösung von  $\Delta n = 512$ .

Es wurden insgesamt 3 Messreihen aufgenommen:

- **Messreihe 1:** Der Laser wurde mit einer Leistung von  $P_1 = 12.8$  mW (Maximalleistung nach dem Laserline-Filter) betrieben. Die Messung erfolgte am in Abb. 18 (oben) gelb umrahmten NV-Zentrum und dauerte  $T_1 = 5838$  s.
- **Messreihe 2:** Der Laser wurde mit einer Leistung von  $P_2 = 6.4$  mW (Halbe Leistung nach dem Laserline-Filter) betrieben. Die Messung erfolgte am in Abb. 18 (oben) gelb umrahmten NV-Zentrum und dauerte  $T_2 = 9571$  s.
- **Messreihe 3:** Der Laser wurde wieder mit einer Leistung von  $P_3 = 12.8$  mW betrieben. Die Messung erfolgte am in Abb. 18 (oben) rot umrahmten NV-Zentrum und dauerte  $T_3 = 5215$  s.

Messreihe 3 dient hierbei nur der Bestätigung der durch Messreihe 1 gewonnenen Resultate.

### 2.3.1 Zeitkonstante

Die Histogramme der drei Messreihen sind in den Abbildungen 15, 16 und 17 (oben) dargestellt. In allen drei ist deutlich die Signatur einer Sub-Poisson Statistik zu erkennen. Außerdem fällt mit bloßem Auge auf, dass die Zeitkonstante der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für höhere Laserleistungen kleiner ist (die Kerbe im Histogramm ist schmaler).

Um die Zeitkonstante  $\tau_{\text{eff}}$  mit  $\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_{\text{Pump}}} + \frac{1}{\tau_{\text{Rad}}}$  zu bestimmen und zudem eine Skalierung der  $x$ 2- und  $y$ 2-Achsen zu erhalten setzen wir eine Fitfunktion vom Typ

$$\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n) = e \cdot \left( 1 - (1 - f) \exp \left[ -\frac{|x - g|}{h} \right] \right) \quad (79)$$

an<sup>1</sup>. Der Fitparameter  $f$  ist dem Poisson-Untergrund geschuldet und gibt direkt  $g^{(2)}(0)$  an. Wir werden diesen unten auf Basis der gemessenen Zählraten auf und neben dem NV-Zentrum abschätzen und so einen Vergleich mit dem Fit ermöglichen.

<sup>1</sup>Wie man anhand Abb. 15 (oben) erkennt, lässt sich in dem untersuchten System ein leichtes *Bunching* für  $25 \text{ ns} \leq |\tau| \leq 75 \text{ ns}$  beobachten, was eine Modifikation der Fitfunktion erfordern würde. Wir vernachlässigen diesen durch das *Shelving* im Triplet-Zustand hervorgerufenen Effekt hier.

Aufgrund der Einstellungen von TAC und MCA ergibt sich als Skalierungsfaktor für die Bins  $\varepsilon = \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{200 \text{ ns}}{512} = 0.390625 \text{ ns}$ . Für die einzelnen Fits ergeben sich die folgenden Parameter (mit asymptotischen Standardabweichungen):

- **Messreihe 1:** Der Fit ist in Abb. 15 (unten) dargestellt. `Gnuplot` liefert  $e = 134.532$ ,  $f = 0.448823 \pm 0.02768$ ,  $g = 236.109$  und  $h = 18.9073 \pm 1.5$ . Damit folgt für die effektive Zeitkonstante  $\tau_{\text{eff}}^{(1)} = \varepsilon \cdot h \approx 7.39 \text{ ns}$  und wir finden

$$\tau_{\text{eff}}^{(1)} = (7.4 \pm 0.6) \text{ ns} \quad (80)$$

Weiter folgt  $g^{(2)}(0) = f = 0.45 \pm 0.03 < 0.5$  was auf einen  $n = 1$  Fock-Zustand hindeutet. Auf dem NV-Zentrum ergab sich eine mittlere Countrate von  $\dot{N}_1 \approx 10000 \text{ s}^{-1}$  während das Untergrundsignal zu  $\dot{B}_1 \approx 2000 \text{ s}^{-1}$  bestimmt wurde. Damit ergibt sich der optimale Wert für  $g^{(2)}(0)$  zu

$$g_*^{(2)}(0) = 1 - \rho^2 = 1 - \left( \frac{\dot{N}_1 - \dot{B}_1}{\dot{N}_1} \right)^2 = 0.36 \quad (81)$$

Mit  $g^{(2)}(0) = 0.45 \geq 0.36 = g_*^{(2)}(0)$  liegt unser Messwert im Rahmen des Erwartbaren.

- **Messreihe 2:** Der Fit ist in Abb. 16 (unten) dargestellt. `Gnuplot` liefert  $e = 82.004$ ,  $f = 0.507028 \pm 0.02536$ ,  $g = 233.137$  und  $h = 33.5887 \pm 3.092$ . Damit folgt für die effektive Zeitkonstante  $\tau_{\text{eff}}^{(2)} = \varepsilon \cdot h \approx 13.12 \text{ ns}$  und wir finden

$$\tau_{\text{eff}}^{(2)} = (13.1 \pm 1.2) \text{ ns} \quad (82)$$

Weiter folgt  $g^{(2)}(0) = f = 0.51 \pm 0.03 \sim 0.5$ . Auf dem NV-Zentrum ergab sich eine mittlere Countrate von  $\dot{N}_2 \approx 7000 \text{ s}^{-1}$  während das Untergrundsignal zu  $\dot{B}_2 \approx 1500 \text{ s}^{-1}$  bestimmt wurde. Damit ergibt sich der optimale Wert für  $g^{(2)}(0)$  zu  $g_*^{(2)}(0) \approx 0.38$ . Mit  $g^{(2)}(0) = 0.51 \geq 0.38 = g_*^{(2)}(0)$  liegt unser Messwert im Rahmen des Erwartbaren, besitzt jedoch noch Optimierungspotential (längere Messzeiten, bessere Justage, anderes NV-Zentrum etc.).

- **Messreihe 3:** Der Fit ist in Abb. 17 (unten) dargestellt. `Gnuplot` liefert  $e = 87.1567$ ,  $f = 0.498398 \pm 0.0523$ ,  $g = 235.859$  und  $h = 9.29208 \pm 1.435$ . Damit folgt für die effektive Zeitkonstante  $\tau_{\text{eff}}^{(3)} = \varepsilon \cdot h \approx 3.63 \text{ ns}$  und wir finden

$$\tau_{\text{eff}}^{(3)} = (3.6 \pm 0.6) \text{ ns} \quad (83)$$

Weiter folgt  $g^{(2)}(0) = f = 0.50 \pm 0.05 \sim 0.5$ . Auf dem NV-Zentrum ergab sich eine mittlere Countrate von  $\dot{N}_3 \approx 9000 \text{ s}^{-1}$  während das Untergrundsignal zu  $\dot{B}_3 \approx 2000 \text{ s}^{-1}$  bestimmt wurde. Damit ergibt sich der optimale Wert für  $g^{(2)}(0)$  zu  $g_*^{(2)}(0) \approx 0.40$ . Mit  $g^{(2)}(0) = 0.50 \geq 0.40 = g_*^{(2)}(0)$  liegt unser Messwert im Rahmen des Erwartbaren.

Bemerkenswert an den Resultaten ist zweierlei: Erstens ist  $\tau_{\text{eff}}^{(1)} = 7.4 \text{ ns} > 3.6 \text{ ns} = \tau_{\text{eff}}^{(3)}$  obwohl in beiden Fällen ein NV-Zentrum bei voller Laserleistung untersucht wurde. Die Abweichung ist zum einen sicher auf die statistischen Fehler zurückzuführen (speziell Messung 3 weist ein niedriges Poisson-Level und damit starkes Rauschen auf). Zum anderen kann nicht garantiert werden, dass das zweite NV-Zentrum exakt derselben Pumprate ausgesetzt war (Staub auf der Probe, Inhomogenität des Lasers etc.). Zweitens ist  $\tau_{\text{eff}}^{(2)} = 13.1 \text{ ns} > \tau_{\text{eff}}^{(1)}, \tau_{\text{eff}}^{(3)}$ . Dies lässt sich auf die unterschiedlichen Laserleistungen  $P_1 = P_3 = 12.8 \text{ mW} > 6.4 \text{ mW} = P_2$  und damit unterschiedliche Pumpraten  $\frac{1}{\tau_{\text{Pump}}^{(1)}} = \frac{1}{\tau_{\text{Pump}}^{(3)}} > \frac{1}{\tau_{\text{Pump}}^{(2)}}$  zurückführen. Bedenkt man, dass  $\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_{\text{Pump}}} + \frac{1}{\tau_{\text{Rad}}}$ , so ist das Ergebnis  $\tau_{\text{eff}}^{(2)} > \tau_{\text{eff}}^{(1)}, \tau_{\text{eff}}^{(3)}$  verständlich und im Rahmen der Theorie erklärbar.

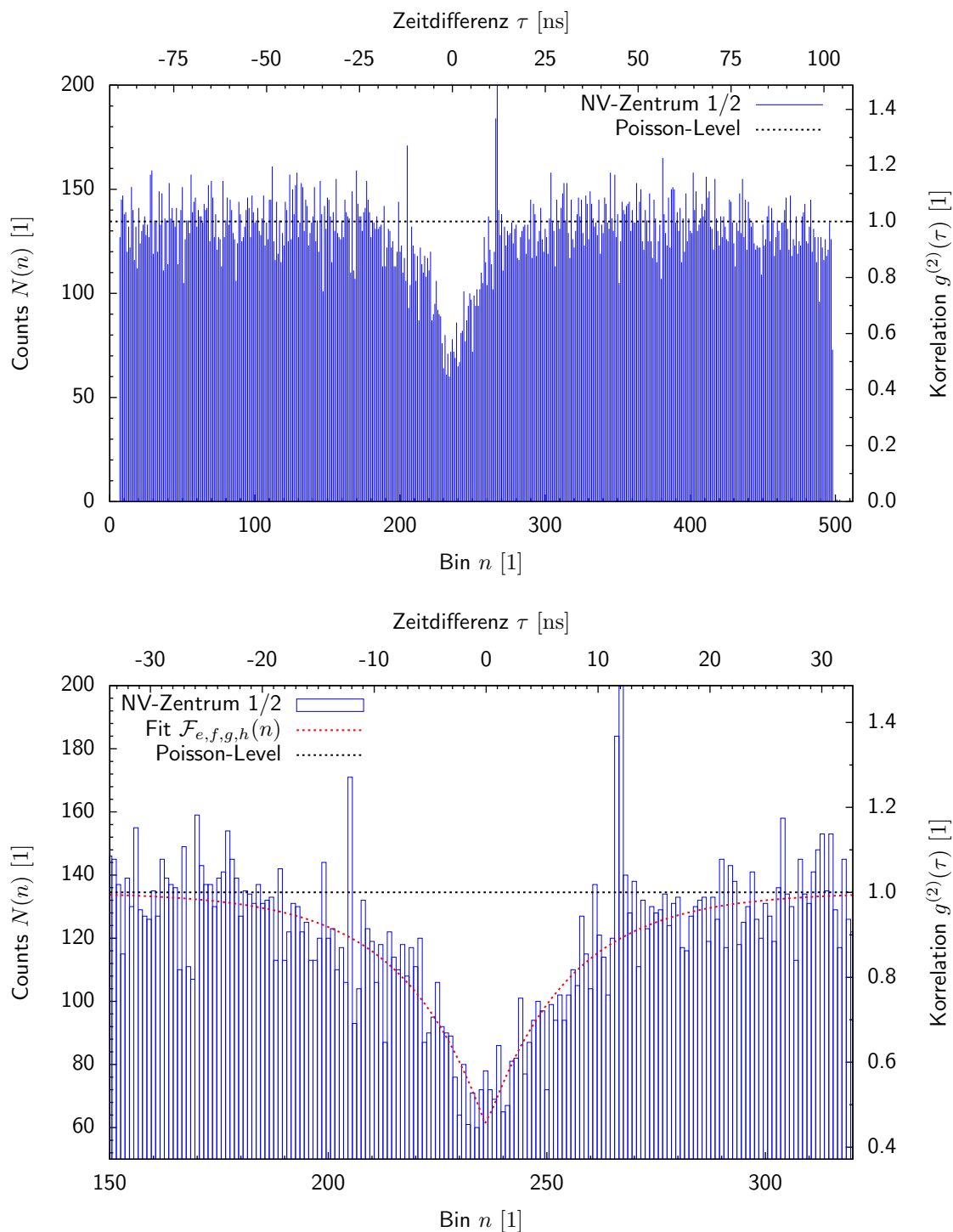


ABBILDUNG 15 (Farbe online) : *Oben*: Gesamter Messbereich. *Unten*: Ausschnitt für  $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 1 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe des Fits  $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$  (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit  $g^{(2)}(0) \approx 0.5$  für den Fit bei  $n \approx 235$  bzw.  $\tau = 0$ .

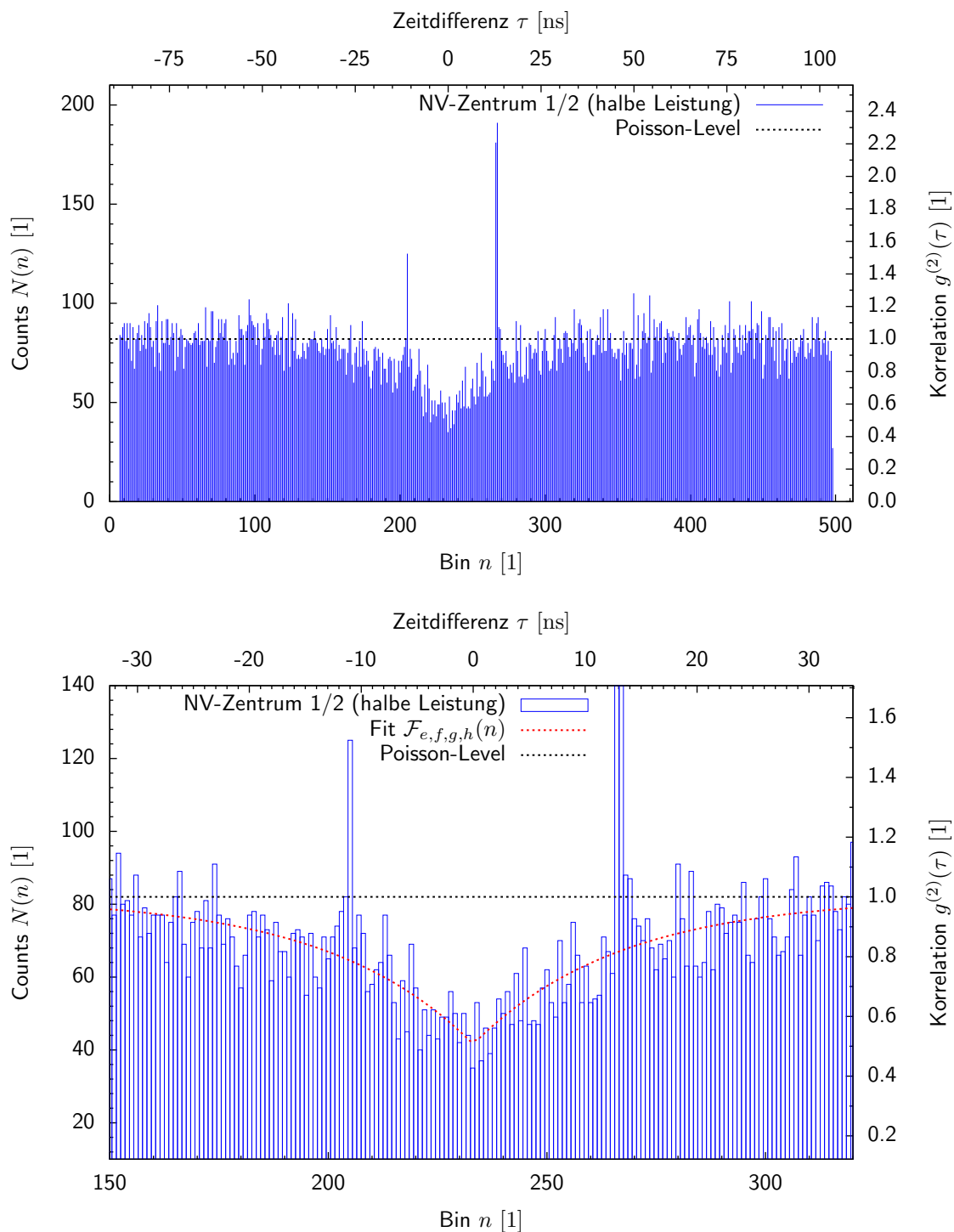


ABBILDUNG 16 (Farbe online) : *Oben*: Gesamter Messbereich. *Unten*: Ausschnitt für  $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 2 mit halbiertem Laserleistung detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe des Fits  $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$  (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit  $g^{(2)}(0) \approx 0.5$  für den Fit bei  $n \approx 233$  bzw.  $\tau = 0$ .

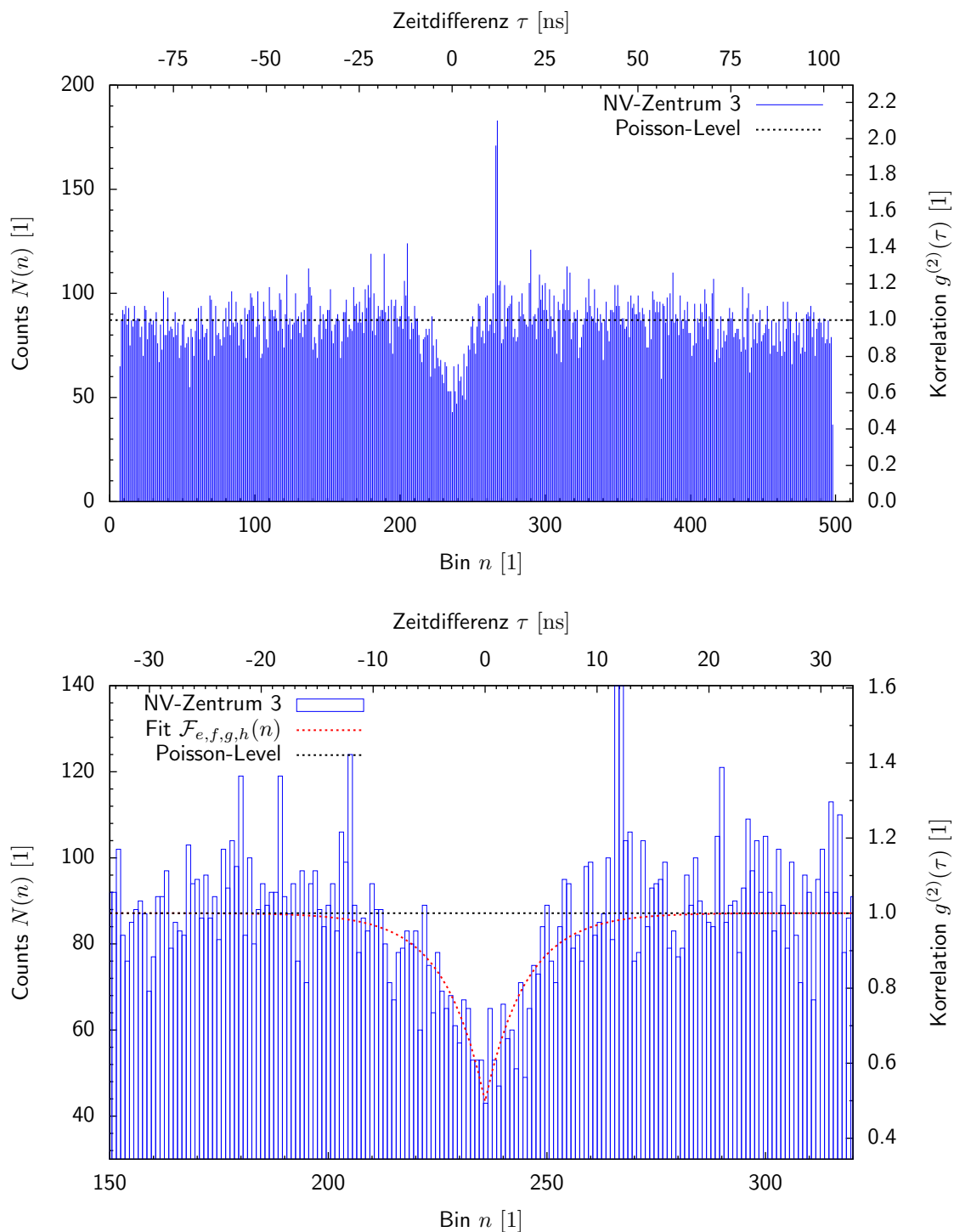


ABBILDUNG 17 (Farbe online) : *Oben*: Gesamter Messbereich. *Unten*: Ausschnitt für  $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 3 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  bzw. der Bin-Nummer  $n$ . Die rechte  $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große  $\tau$  und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von  $g^{(2)}(\tau) = 1$  und  $\tau = 0$  wurde mit Hilfe des Fits  $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$  (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit  $g^{(2)}(0) \approx 0.5$  für den Fit bei  $n \approx 235$  bzw.  $\tau = 0$ .

### 2.3.2 Größe des NV-Zentrums

Im Folgenden wollen wir eine Abschätzung der Größe eines NV-Zentrums angeben. Die beiden untersuchten NV-Zentren sind in Abb. 18 dargestellt. Die Farbcodierung gibt die lokal gemessene Zählrate der Start-APD wieder. In den Detailplots wurden jeweils horizontale und vertikale Achsen eingezeichnet. Die Countraten entlang dieser Pfade werden in den Abbildungen 19 und 20 gegen die  $x$ - bzw.  $y$ -Position aufgetragen.

Um die Größe der NV-Zentren abzuschätzen legen wir eine GAUSS-Kurve durch die Werte, also

$$\mathcal{F}_{A,a,\sigma,B}(x) = A \cdot \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] + B \quad (84)$$

mit der Varianz  $\sigma^2$ , die als Maß für die Breite der Kurve herangezogen werden kann. Als Abschätzung für den Durchmesser eines NV-Zentrums wählen wir die Halbwertsbreite:

$$d \approx \text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \quad (85)$$

Die Fits in Abb. 19 gehören zum in den Messungen 1 und 2 untersuchten NV-Zentrum. `Gnuplot` liefert die beiden Fitparameter  $\sigma_x \approx 0.164 \mu\text{m}$  und  $\sigma_y \approx 0.173 \mu\text{m}$  für  $x$ - und  $y$ -Richtung. Wir mitteln  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$  und erhalten als Durchmesser  $d_1 \approx 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 0.4 \mu\text{m}$ . Analog finden wir für die Fits in Abb. 19 (NV-Zentrum der Messreihe 3)  $\sigma_x \approx 0.293 \mu\text{m}$  und  $\sigma_y \approx 0.095 \mu\text{m}$ . Mit dem Mittelwert für  $x$ - und  $y$ -Richtung folgt  $d_2 \approx 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 0.5 \mu\text{m}$ . Damit lässt sich die Größenordnung eines NV-Zentrums angeben zu

$$d = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \approx 0.5 \mu\text{m} \quad (86)$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass es sich bei diesem Wert um eine *Abschätzung* der Größe eines NV-Zentrums handelt. Es wird auch anhand der in Abb. 18 (unten) dargestellten Ausschnitte klar, dass NV-Zentren (zumindest mit der hier eingesetzten Technik) keine scharf umrissene, eindeutige *Form* aufweisen und die Definition eines reproduzierbaren ‘‘Durchmessers’’ wage bleiben muss.

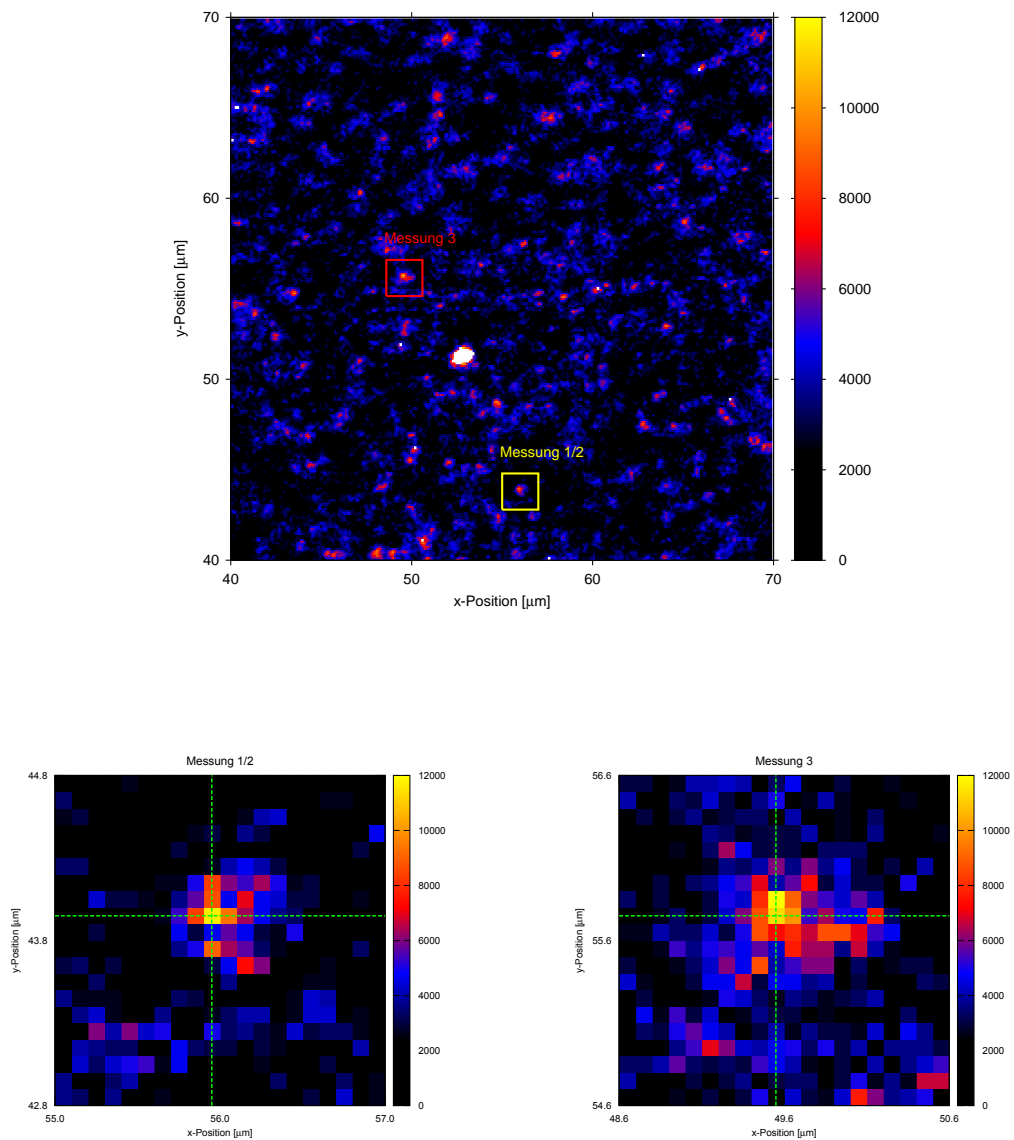


ABBILDUNG 18 (Farbe online) : *Oben*: Scan des für die Messungen 1, 2 und 3 verwendeten Bereiches. Die untersuchten NV-Zentren sind grafisch hervorgehoben. Die an der APD 1 detektierte Photonenzahl pro Sekunde ist farbkodiert dargestellt. *Unten*: Ausschnittvergrößerungen der rot und gelb markierten Bereiche. Die grün markierten Achsen bezeichnen die für die Fits in Abb. 19 herangezogenen Querschnitte.

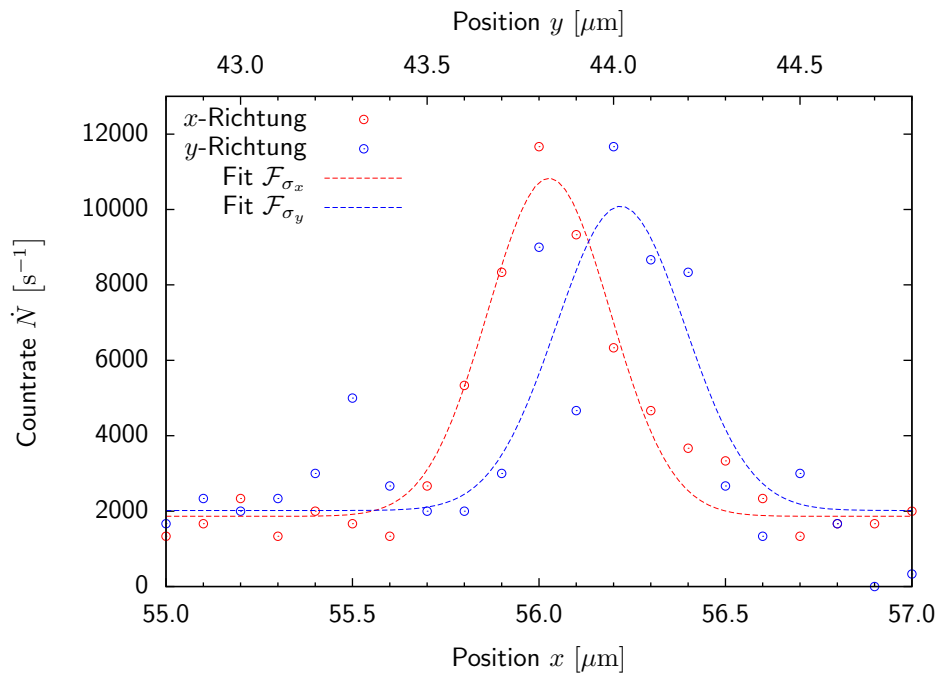


ABBILDUNG 19 (Farbe online) : Zählraten entlang der in Abb. 18 links unten markierten Querschnitte durch das in den Messungen 1/2 untersuchte NV-Zentrum. Zur Abschätzung des Durchmessers wurden jeweils Gaußkurven angefitet.

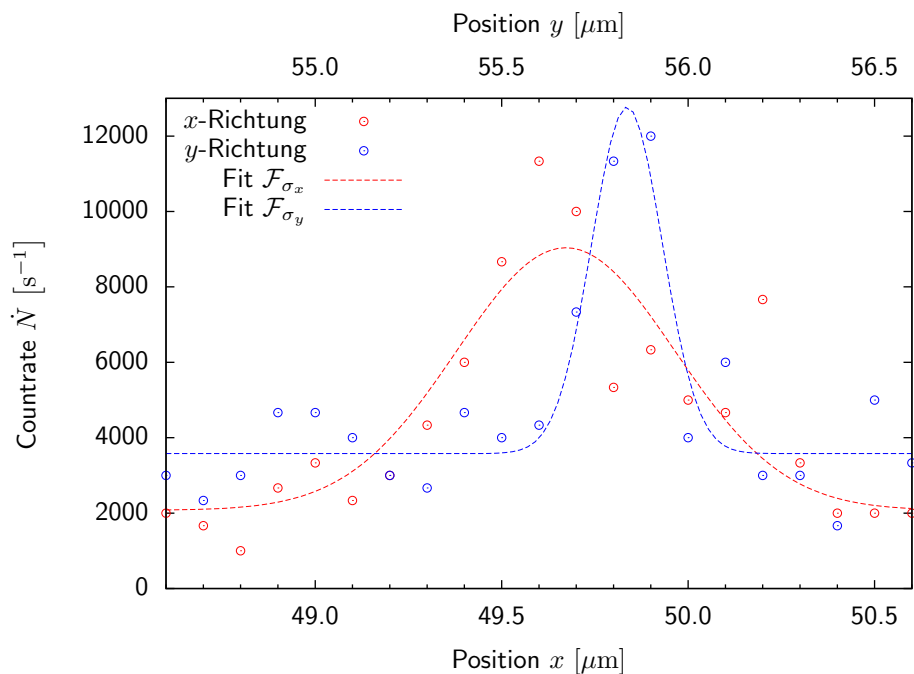


ABBILDUNG 20 (Farbe online) : Zählraten entlang der in Abb. 18 rechts unten markierten Querschnitte durch das in der Messung 3 untersuchte NV-Zentrum. Zur Abschätzung des Durchmessers wurden jeweils Gaußkurven angefitet.

### 2.3.3 Relative Bewegung der Probe während der Messung

Wie schon in der Versuchsbeschreibung erwähnt, ist eine perfekte Langzeitstabilität des Piezo-Tisches nicht gegeben. Dies führt im Laufe der Messungen zu einer Drift der NV-Zentren. Diese wandern sowohl in der Fokusebene als auch orthogonal dazu. Da beide Bewegungen die Countrate an den APDs mit der Zeit drastisch senken, muss die Drift manuell etwa alle 10 min ausgeglichen werden. Die Positionen im  $xyz$ -Raum wurden notiert und sind für die Messungen 1 und 2 in Abb. 21 und für die Messung 3 in Abb. 22 dargestellt. Die Messungen beginnen jeweils bei  $t_{*A}$  und enden bei  $t_{*E}$ .

Man erkennt, dass für knapp zweistündige Messungen eine Drift von bis zu  $0.5 \mu\text{m}$  in eine Richtung auftreten kann. Zudem scheint der Tisch einer vergleichsweise starken Drift in  $x$ -Richtung unterworfen zu sein, während die Stabilität in  $y$ -Richtung deutlich höher ist. Die Drift senkrecht zur Fokusebene ist vergleichbar mit der  $x$ -Drift.

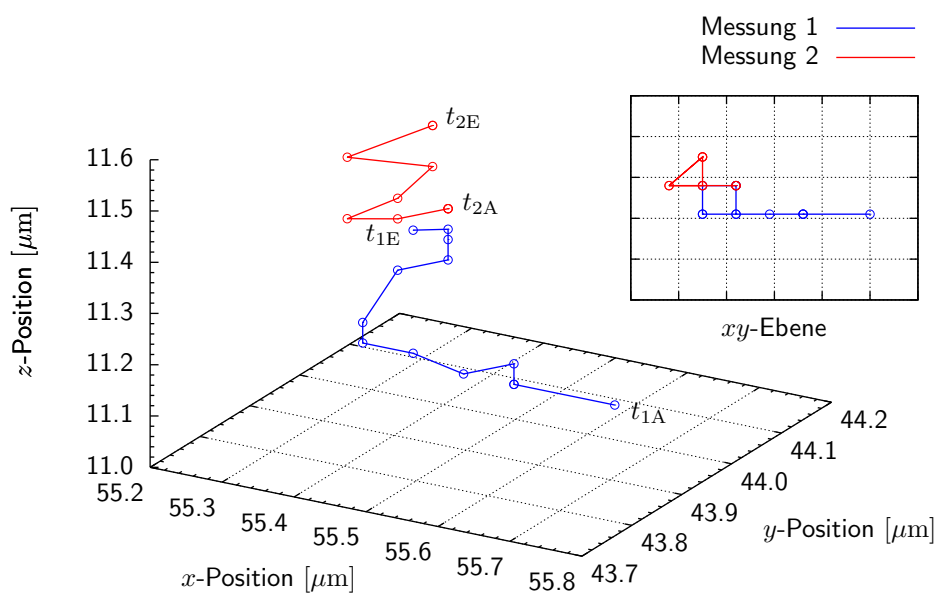


ABBILDUNG 21 (Farbe online) : Drift des in Messung 1 und 2 untersuchten NV-Zentrums während der Messungen im 3-dimensionalen Ortsraum. Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten beschreiben die horizontale Drift der Piezo-Aktoren. Die  $y$ -Koordinate beschreibt die vertikale Drift senkrecht zur Fokusebene. Es ist  $t_{1E} - t_{1A} \approx 106$  min und  $t_{2E} - t_{2A} \approx 145$  min.

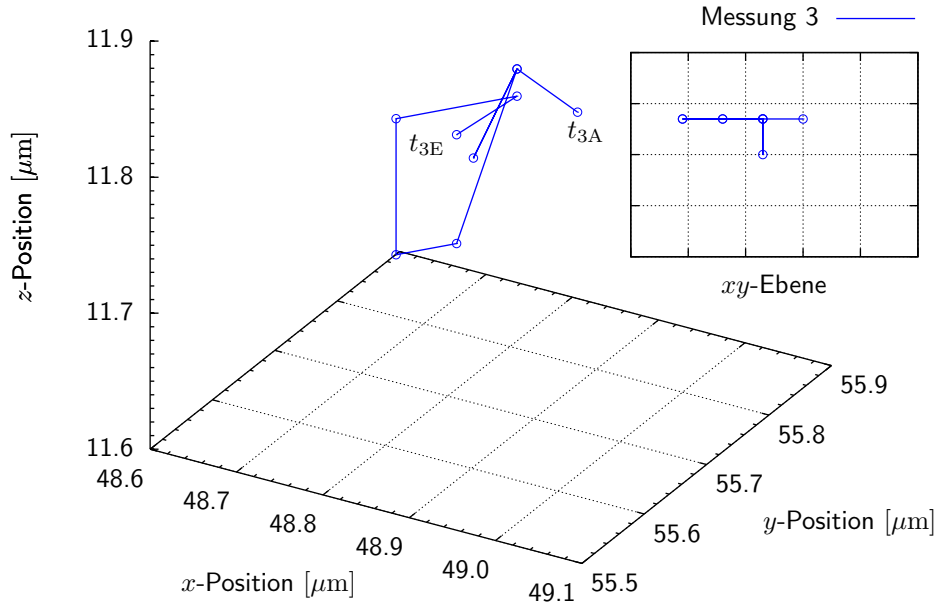


ABBILDUNG 22 (Farbe online) : Drift des in Messung 3 untersuchten NV-Zentrums während der Messungen im 3-dimensionalen Ortsraum. Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten beschreiben die horizontale Drift der Piezo-Aktoren. Die  $z$ -Koordinate beschreibt die vertikale Drift senkrecht zur Fokusebene. Es ist  $t_{3E} - t_{3A} \approx 85$  min.

### 2.3.4 Crosstalk der APDs

Neben der oben beschriebenen Drift führt ein weiterer Effekt, der sog. *Crosstalk* zwischen beiden APDs, zu erklärungsbedürftigen Anomalien, die nichts mit der zu erwartenden Photonenzahlstatistik zu tun haben.

In den Datensätzen der Messungen 1, 2 und 3 (für Ausschnittsvergrößerungen siehe Abb. 23) fallen links und rechts von  $\tau = 0$  in symmetrischem Abstand zwei ungewöhnlich hohe Peaks auf. Diese sind Folge des Crosstalks zwischen den APDs.

Fällt ein Primärphoton auf eine APD löst er in deren pn-Übergang einen Lawinendurchbruch aus. Die hohe Zahl freier Elektronen führt zu erhöhten Rekombinationsraten. Die dadurch emittierten Sekundärphotonen verlassen die APD zum Teil und werden mangels optischem Isolator durch die Faser zurück in die Optik geführt. Werden sie dort reflektiert gelangen sie auf dem Rückweg zur anderen APD und lösen so die Detektion eines Photonennpaars mit fester Verzögerungszeit  $\Delta T_{CT}$  aus. Diese "falschen" Photonennpaare sind für die beiden Peaks verantwortlich. Deren unterschiedliche Höhe lässt sich wahrscheinlich durch die Unzulänglichkeit des Beamsplitters in der Faser begründen (dessen Split-Verhältnis ist stark wellenlängenabhängig).

Mit Hilfe der Verzögerungszeit lässt sich der Abstand des (unbekannten) Reflektors von den APDs bestimmen. Hierfür lesen wir den Abstand der Crosstalk-Peaks in den drei Diagrammen in Abb. 23 ab und erhalten mit dem Umrechnungsfaktor  $\varepsilon = \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{200 \text{ ns}}{512} = 0.390625 \text{ ns}$  übereinstimmend für alle drei Messreihen  $2\Delta T_{CT} = \Delta n \cdot \varepsilon \approx 24.2 \text{ ns}$ .

Da wir bei der Zeitauflösung auf die Bin-Breite  $\varepsilon$  beschränkt sind, erhalten wir gerade  $\varepsilon$  als Fehlerabschätzung für die Zeitdifferenz zwischen den beiden Peaks. Es folgt also  $2\Delta T_{CT} = (24.2 \pm 0.4) \text{ ns}$  und damit für die Verzögerungszeit  $\Delta T_{CT} = (12.1 \pm 0.2) \text{ ns}$ . Die Laufzeit des Lichtes ergibt sich unter Annahme der Vakuumlichtgeschwindigkeit<sup>2</sup> zu  $l_{CT} = (7.26 \pm 0.12) \text{ m}$ . Beachten wir noch, dass das Licht von der APD zum Reflektor und zurück zur anderen APD laufen muss, ergibt sich

<sup>2</sup>Diese Annahme stellt auf Grund des Brechungsindex der Faser natürlich eine Näherung dar.

## 2 | Auswertung

schließlich

$$d_{A \leftrightarrow R} = \frac{l_{CT}}{2} = (363 \pm 6) \text{ cm} \quad (87)$$

für den Abstand zwischen APD und Reflektor. Da keine Messungen der optischen Lichtlaufwege des Aufbaus durchgeführt wurden, lässt sich nicht ableiten, welches Bauteil für die Reflexion verantwortlich ist.

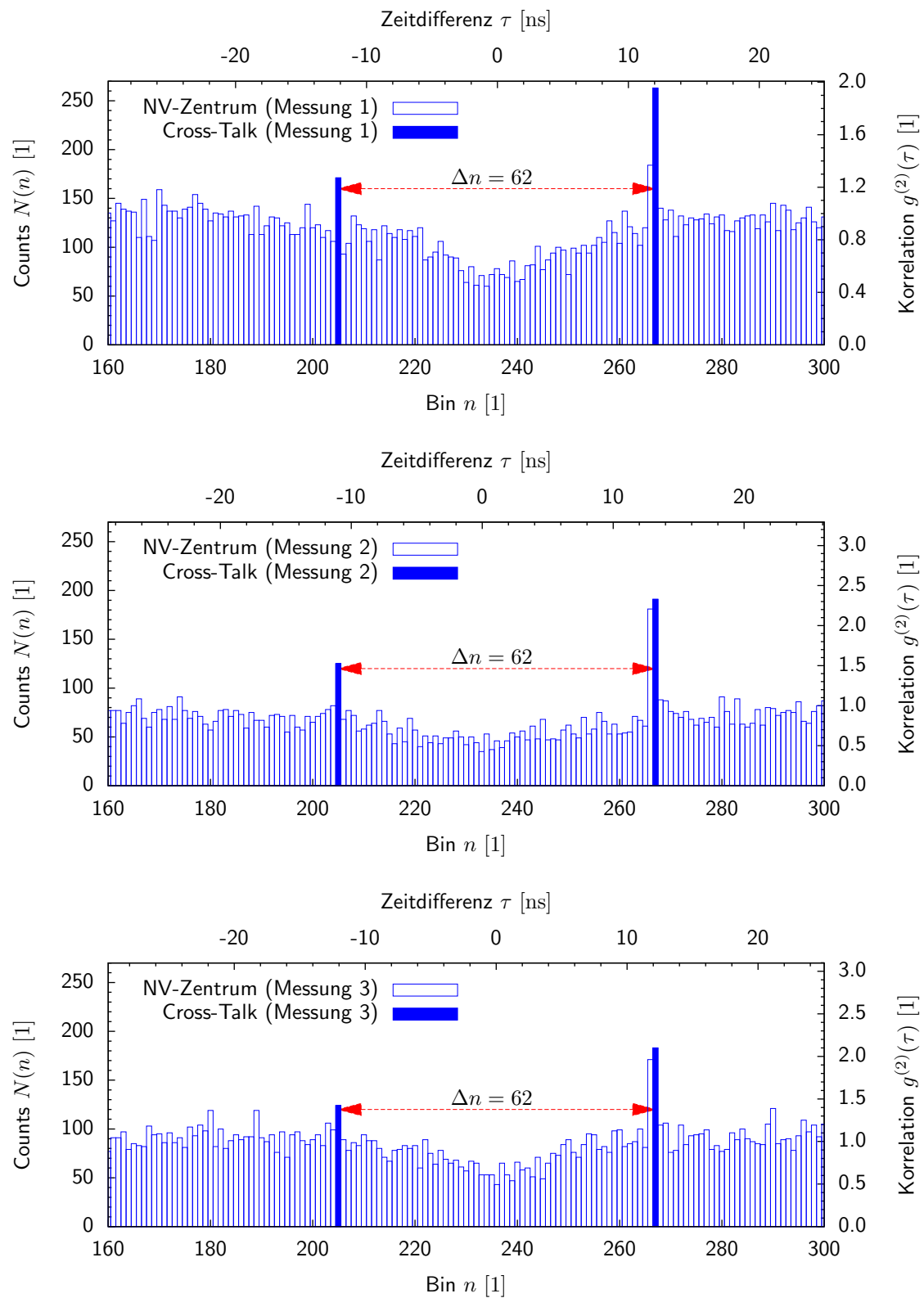


ABBILDUNG 23 (Farbe online) : Ausmessung des Cross-Talks der APDs. Die beiden von innerhalb des optischen Aufbaus reflektierten Photonen hervorgerufenen Peaks sind blau markiert. Von oben nach unten sind die Messungen 1, 2 und 3 abgebildet.

### 3 Fehlerdiskussion

Bei der Auswertung wurden für relevante Werte die von **Gnuplot** veranschlagten asymptotischen Standardfehler berücksichtigt. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf eine qualitative Diskussion möglicher Fehlerquellen.

- Generell gilt: Bei optischen Aufbauten bestimmt die Justage des Strahlengangs die Qualität der Messungen. In unserem Fall bedeutet dies, dass durch Anpassung der Spiegel und des Fokus (bei der Untersuchung von NV-Zentren) möglichst viel Licht am Ende in den Kollimator einkoppeln soll. Dabei sind Streuverluste an Verunreinigungen der Linsen und Spiegel unvermeidbar. Auch sind Verluste beim Einkoppeln des Strahls und durch Absorption in der Faser nicht zu vernachlässigen.
- Für die Photonenstatistik ist es von großer Wichtigkeit, dass die eingekoppelte Strahlung möglichst nur das Licht der zu untersuchenden Strahlungsquelle enthält. Im Fall von thermischem Licht sind hier kaum Störungen zu erwarten, da selbst Hintergrundlicht von der Raumbelichtung oder der Elektronik als chaotisch angesehen werden kann. Bei der Messung von kohärentem Licht kann thermische Hintergrundstrahlung zu Fehlern führen. Diese Einflüsse lassen sich aber durch einen abgedunkelten Raum minimieren.

Am problematischsten ist die Untersuchung der Einzelphotonenquellen. Da die NV-Zentren durch *kohärente* Laserstrahlung gepumpt werden, hat man es versuchsbedingt mit einer Mischung aus kohärentem und nicht-klassischem Licht zu tun. Der kohärente Anteil wird vor der Einkopplung in die Faser mit einem Laserblocker herausgefiltert. Da dieser Filter nicht perfekt ist, wird die Statistik durch ein kohärentes Untergrundrauschen verzerrt.

- Die APDs haben eine begrenzte Quantenausbeute und eine endliche Totzeit (Zeit bis der Lawinendurchbruch durch passende Beschaltung gelöscht wurde). Beides führt zu nicht detektierten Photonen und damit zu einer Beeinflussung der Statistik.
- Sowohl die APDs als auch der TAC und der nachgeschaltete MCA haben gerätespezifische Toleranzen die zu Fehlern der gemessenen Zeitdifferenzen führen. Speziell der MCA begrenzt durch seine Kanalzahl die Zeitauflösung.
- Bei der Messung an NV-Zentren können Verunreinigungen auf der Oberfläche der Probe (Staub) oder im Immersionsöl zu falschen Messungen führen, falls diese Objekte mit Fehlstellen verwechselt werden. Dies fällt aber spätestens bei der Auswertung der Statistik auf, da diese kein Antibunching zeigen.
- Die schon besprochene Drift des Piezo-Tisches kann bei fehlender oder zu seltener Nachjustierung zum Abfall der Countrate führen. Im schlimmsten Fall verlässt das NV-Zentrum den Fokus und die Statistik wird mit poissonverteiltem Hintergrundrauschen verfälscht (d.h. die Ausprägung der gewünschten Charakteristika nimmt ab).
- Der Crosstalk zwischen den APDs verfälscht die Statistik – allerdings in sehr begrenztem Umfang. Da die Position der Peaks konstant und ihre Breite gering ist, lässt sich der unerwünschte Effekt beim Fitten eliminieren, indem die betroffenen Bins aus dem Datensatz entfernt werden.

Zuletzt sei angemerkt, dass es sich bei den vorliegenden Messungen um *statistische* Datenerhebungen handelt. Die verwendeten Daten sind daher unvermeidbaren statistischen Schwankungen unterworfen, die aber durch lange Messzeiten minimiert werden können.

## 4 Zusammenfassung

Im Rahmen des hier beschriebenen Versuches wurde die Photonenstatistik unterschiedlicher Lichtquellen untersucht, indem die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung mit Hilfe eines Hanbury Brown-Twiss Interferometers ausgemessen wurde.

**Thermisches Licht** Bei der Analyse thermischer Strahlung wurde, wie von der klassischen Elektrodynamik und der Quantenmechanik postuliert, *Photonenbunching* beobachtet. Die erhöhte Wahrscheinlichkeit einer Koinzidenzmessung von Photonen schlug sich in einer Super-Poisson-Statistik nieder.

Diese lieferte einen Wert für die Kohärenzzeit und damit die Kohärenzlänge der untersuchten Strahlung

$$\tau_c = (0.196 \pm 0.016) \text{ ns} \quad \Rightarrow \quad l_c = (59 \pm 5) \text{ mm} .$$

**Kohärentes Licht** Bei der Analyse kohärenter Strahlung wurde die sowohl klassisch als auch quantenmechanisch zu erwartende *Poissonverteilung* der Photonen nachgewiesen. Die theoretische Vorhersage einer konstanten Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau) \equiv 1$  konnte bestätigt werden. Dies kann als experimenteller Nachweis für die klassische Beschreibung von Laserlicht als ebene, monochromatische Welle bzw. für die quantenmechanische Beschreibung durch kohärente Zustände gesehen werden.

**Nicht-klassisches Licht** Um nicht-klassisches Licht nachzuweisen, wurden NV-Zentren in Diamant mit einem Laser gepumpt um beim Übergang in den Grundzustand (Fluoreszenz) als Einzelphotonenquellen zu fungieren. Die NV-Zentren wurden mit Hilfe eines Immersionsmikroskops abgebildet und untersucht. Die Aufnahme der Photonenstatistik wurde bei zwei unterschiedlichen Leistungen durchgeführt, sodass die Folgen einer niedrigeren Pumprate  $\tau_{\text{Pump}}^{-1}$  beobachtet werden konnten<sup>3</sup>.

Die Messungen bestätigten, dass es sich bei den untersuchten NV-Zentren um Einzelphotonenquellen handelt, deren Strahlung durch quantenmechanische Fock-Zustände beschrieben wird und einer Sub-Poisson-Statistik unterliegt (*Photonenantibunching*).

Bei einer (gefilterten) Laserleistung  $P_1 = 12.8 \text{ mW}$  ergab sich eine effektive Zeitkonstante von

$$\tau_{\text{eff}}^{(1)} = (7.4 \pm 0.6) \text{ ns}$$

sowie den Wert

$$g^{(2)}(0) = 0.45 \pm 0.03 < 0.5$$

für die Korrelationsfunktion bei  $\tau = 0$ . Dieser bestätigt die These, dass es sich bei NV-Zentren um echte Einzelphotonenquellen handelt.

Für eine Laserleistung von  $P_2 = 6.4 \text{ mW}$  ergab sich die deutlich größere Zeitkonstante

$$\tau_{\text{eff}}^{(2)} = (13.1 \pm 1.2) \text{ ns} ,$$

im Einklang mit den theoretischen Erwartungen bei geringeren Pumpraten.

Die Größe der NV-Zentren wurde zu

$$d \approx 0.5 \text{ } \mu\text{m}$$

abgeschätzt.

<sup>3</sup>Durch sehr geringe Pumpraten ließe sich theoretisch die Zerfallsrate des angeregten Zustandes der NV-Zentren bestimmen, da  $\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_{\text{Pump}}} + \frac{1}{\tau_{\text{Rad}}} \rightarrow \frac{1}{\tau_{\text{Rad}}}$  für  $\tau_{\text{Pump}} \rightarrow \infty$ . Diese Messung wurde nicht durchgeführt.

## Abbildungsverzeichnis

1	Spektrale Verteilung $u(\lambda)$ der Intensität eines idealen schwarzen Strahlers für unterschiedliche Temperaturen $T$ (Quelle: [1]). Man erkennt sowohl die Änderung der maximalen Intensität als auch die Verschiebung des Emissionsmaximums mit zunehmender Temperatur. Die Lage des Maximums wird vom WIENSCHEN VERSCHIEBUNGSGESETZ beschrieben. . . . .	3
2	(a)-(b): Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_i^{\text{thermisch}}(n_i; \langle n_i \rangle)$ für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt deutlich das "Auseinanderlaufen" der Verteilung bei steigender Photonenzahl. Dies ist dem <i>Photonenbunching</i> zuzuschreiben (e): Statistische Verteilung der Amplitude $a(t)$ des <b>E</b> -Feldes und seiner Phase $\varphi(t)$ . Während die Phase offensichtlich gleichverteilt ist gehorcht die Statistik der Amplitude einer Gaußverteilung. . . . .	10
3	(a)-(b): Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_i^{\text{klassisch}}(n_i; \langle n_i \rangle)$ für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt die Häufung der Zustände im Umfeld des Mittelwertes der Besetzungszahl. Für große Besetzungszahlen wird die Varianz im Vergleich zum Besetzungszahlquadrat vernachlässigbar. Dies entspricht dem klassischen Limes einer (nahezu) konstanten Amplitude. (e): Statistische Verteilung der Amplitude $a(t)$ des <b>E</b> -Feldes und seiner Phase $\varphi(t)$ . Sowohl Phase als auch Amplitude sind in einem kleinen Bereich lokalisiert. Dies kennzeichnet den Zustand kleinster Amplituden-Phasen-Unschärfe und approximiert die klassische ebene Welle, die als Punkt in obigem Diagramm dargestellt würde. . . .	12
4	(a)-(b): Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_i^{\text{Fock}}(n_i; \langle n_i \rangle)$ für unterschiedliche Erwartungswerte des Besetzungszahloperators (Quelle: [2]). Man erkennt die scharf bestimmte Besetzungszahl. Solche Lichtzustände besitzen kein klassisches Analogon. (e): Statistische Verteilung der Amplitude $a(t)$ des <b>E</b> -Feldes und seiner Phase $\varphi(t)$ . Während die Amplitude (und damit die Besetzungszahl) scharf bestimmt ist, sind die gemessenen Phasen über alle Winkel verteilt. Die Mittelung des <b>E</b> -Feldvektors über verschiedene Realisierungen des Ensembles verschwindet folglich. . . . .	13
5	Links: Atomare Struktur einer NV-Fehlstelle im Diamantgitter (Quelle: [4]). An zwei benachbarten Stellen im Gitter fehlen die C-Atome; eines wird durch ein N-Atom ersetzt. Rechts: Elektronisches Levelschema einer solchen NV-Fehlstelle (Quelle: [4]). Es handelt sich um ein 3-Niveau-System mit zwei Triplett-Zuständen ${}^3E$ und ${}^3A$ die jeweils auf Grund der Spin-Bahn-Wechselwirkung in 3 bzw. 2 Unterniveaus aufgespalten werden. . . . .	14
6	Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ für die drei vorgestellten Lichtzustände (Quelle: [2]). Thermische Emittoren gehorchen einer Super-Poissonstatistik für $\tau \sim \tau_{coh}$ und zeigen <i>Bunching</i> . Kohärente Zustände zeichnen sich durch eine Poissonverteilung aus und weisen daher keine Korrelationen ( $g^{(2)}(\tau) \equiv 1$ ) zwischen den Photonen auf. Nicht-klassische Lichtquellen die durch Fock-Zustände beschrieben werden können zeigen für geringe Besetzungszahlen $m_i$ ein ausgeprägtes <i>Anti-bunching</i> . Ihre Photonenstatistik wird durch eine Sub-Poissonverteilung beschrieben. . . . .	16
7	Schematische Darstellung der Detektion einzelner Photonen im Laufe der Zeit (Quelle: [7]). (Grün): <i>Sub-Poissonverteilte</i> Photonen wie sie von Fock-Zuständen beschrieben werden (Einzelphotonenquellen). (Rot): <i>Poissonverteilte</i> Photonen wie sie von kohärenten Zuständen vorhergesagt werden (Laser). (Blau): <i>Super-Poissonverteilte</i> Photonen wie sie von gemischten Zuständen thermischen Lichts beschrieben werden (thermische Strahler). . . . .	17

8	Schematische Darstellung des Hanbury Brown-Twiss Interferometers (Quelle: [10]). Die zu untersuchende Strahlungsquelle wird über einen 50/50-Beamsplitter auf zwei empfindliche Detektoren geführt. In modernen Aufbauten kommen hier i.d.R. Avalanche-Photodioden (APDs) zum Einsatz. Die Zeitdifferenzen zwischen einzelnen Ereignissen werden von einem Time-to-Amplitude-Konverter (TAC) in Spannungspulse konvertiert welche digitalisiert vom Korrelator statistisch ausgewertet werden. . . . .	17
9	Links: Objektiv mit (links) und ohne (rechts) Immersionsöl zwischen Objektträger und Linse (Quelle: [12]). Durch die hohe Brechzahl des Immersionsöls ( $n > 1$ ) fängt das Objektiv mehr Licht auf und erlaubt höhere Auflösungen. Rechts: Schematischer Aufbau eines Raumfilters (Quelle: [13]). Das kollimierte Licht wird durch eine Linse in der Fokalebene fouriertransformiert. Durch eine möglichst klein gewählte Blende ( <i>Pinhole</i> ) können ungewünschte Raumfrequenzen herausgefiltert werden. Auf diese Weise lassen sich ebene Wellen approximieren und von Verunreinigungen hervorgerufene Störungen des Strahlbündels beseitigen. . . . .	19
10	Versuchsaufbau (Quelle: [6]). Das <i>Hanbury Brown-Twiss Interferometer</i> ist im linken Teil der Grafik abgebildet. Der rot-gestrichelte Pfad wird im ersten Versuchsteil zur Bestimmung der Photonenstatistik einer thermischen Lichtquelle benutzt. Für die Messungen mit kohärentem und nicht-klassischem Licht sind die durchgezogenen Pfade von Bedeutung. . . . .	20
11	<i>Oben:</i> Messung 1. <i>Unten:</i> Messung 2. Dargestellt wird die absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe der Fits $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$ (siehe Abb. 12) ermittelt. Man erkennt das Photonenbunching der thermischen Strahlung bei $n \approx 6800$ bzw. $\tau = 0$ . . . . .	22
12	<i>Oben:</i> Messung 1. <i>Unten:</i> Messung 2. Dargestellt wird die absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ im Bereich $6400 \leq n \leq 7200$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe der Fits $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$ ermittelt. Man erkennt das Photonenbunching der thermischen Strahlung bei $n \approx 6800$ bzw. $\tau = 0$ . . . . .	23
13	<i>Oben:</i> Gesamter Messbereich. <i>Unten:</i> Ausschnitt für $6400 \leq n \leq 7200$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 1 und 2 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe des Fits $\mathcal{F}_{b,c,d}(n)$ (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenbunching der thermischen Strahlung mit $g^{(2)}(0) \approx 2$ für den Fit bei $n \approx 6800$ bzw. $\tau = 0$ . . . . .	24
14	<i>Oben:</i> Absolute Anzahl der detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage der 1 wurde mit Hilfe des Fits $\mathcal{F}_a(n) = a$ ermittelt. Die scheinbar zu niedrige Lage des horizontalen Fits ist der geringen Auflösung von Bildschirm bzw. Drucker geschuldet. <i>Unten:</i> Horizontaler Ausschnitt des Datensatzes mit $4000 \leq n \leq 5000$ . Man erkennt hier deutlich die statistischen Schwankungen und die korrekte Lage des Fits $\mathcal{F}_a(n)$ . . . . .	26
15	<i>Oben:</i> Gesamter Messbereich. <i>Unten:</i> Ausschnitt für $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 1 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe des Fits $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$ (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit $g^{(2)}(0) \approx 0.5$ für den Fit bei $n \approx 235$ bzw. $\tau = 0$ . . . . .	29

16	<i>Oben:</i> Gesamter Messbereich. <i>Unten:</i> Ausschnitt für $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 2 mit halbiertes Laserleistung detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe des Fits $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$ (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit $g^{(2)}(0) \approx 0.5$ für den Fit bei $n \approx 233$ bzw. $\tau = 0$ .	30
17	<i>Oben:</i> Gesamter Messbereich. <i>Unten:</i> Ausschnitt für $150 \leq n \leq 320$ . Dargestellt wird die absolute Anzahl der in Messung 3 detektierten Photonen in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit $\tau$ bzw. der Bin-Nummer $n$ . Die rechte $y$ -Achse zeigt die Normierung auf 1 für große $\tau$ und damit die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ . Die Lage von $g^{(2)}(\tau) = 1$ und $\tau = 0$ wurde mit Hilfe des Fits $\mathcal{F}_{e,f,g,h}(n)$ (unten) ermittelt. Man erkennt das Photonenantibunching der nicht-klassischen Strahlung mit $g^{(2)}(0) \approx 0.5$ für den Fit bei $n \approx 235$ bzw. $\tau = 0$ .	31
18	<i>Oben:</i> Scan des für die Messungen 1, 2 und 3 verwendeten Bereiches. Die untersuchten NV-Zentren sind grafisch hervorgehoben. Die an der APD 1 detektierte Photonenzahl pro Sekunde ist farbkodiert dargestellt. <i>Unten:</i> Ausschnittvergrößerungen der rot und gelb markierten Bereiche. Die grün markierten Achsen bezeichnen die für die Fits in Abb. 19 herangezogenen Querschnitte.	33
19	Zählraten entlang der in Abb. 18 links unten markierten Querschnitte durch das in den Messungen 1/2 untersuchte NV-Zentrum. Zur Abschätzung des Durchmessers wurden jeweils Gaußkurven angefitet.	34
20	Zählraten entlang der in Abb. 18 rechts unten markierten Querschnitte durch das in der Messung 3 untersuchte NV-Zentrum. Zur Abschätzung des Durchmessers wurden jeweils Gaußkurven angefitet.	34
21	Drift des in Messung 1 und 2 untersuchten NV-Zentrums während der Messungen im 3-dimensionalen Ortsraum. Die $x$ - und $y$ -Koordinaten beschreiben die horizontale Drift der Piezo-Aktoren. Die $y$ -Koordinate beschreibt die vertikale Drift senkrecht zur Fokusebene. Es ist $t_{1E} - t_{1A} \approx 106$ min und $t_{2E} - t_{2A} \approx 145$ min.	35
22	Drift des in Messung 3 untersuchten NV-Zentrums während der Messungen im 3-dimensionalen Ortsraum. Die $x$ - und $y$ -Koordinaten beschreiben die horizontale Drift der Piezo-Aktoren. Die $y$ -Koordinate beschreibt die vertikale Drift senkrecht zur Fokusebene. Es ist $t_{3E} - t_{3A} \approx 85$ min.	36
23	Ausmessung des Cross-Talks der APDs. Die beiden von innerhalb des optischen Aufbaus reflektierten Photonen hervorgerufenen Peaks sind blau markiert. Von oben nach unten sind die Messungen 1, 2 und 3 abgebildet.	38

## Literatur

- [1] WIKIPEDIA: *Schwarzer Körper*. 2011. – [Online; Stand 11. November 2011]
- [2] ULRICH, Sven M.: *Non-Classical and Stimulated Photon Emission Processes from Self-Assembled Semiconductor Quantum Dots*, Universität Stuttgart, Diss., 2007
- [3] BROURI, R ; BEVERATOS, A ; POIZAT, JP ; GRANGIER, P: Photon antibunching in the fluorescence of individual color centers in diamond. In: *OPTICS LETTERS* 25 (2000), SEP 1, Nr. 17, S. 1294–1296. <http://dx.doi.org/10.1364/OL.25.001294>. – DOI 10.1364/OL.25.001294. – ISSN 0146–9592
- [4] WIKIPEDIA: *Stickstoff-Fehlstellen-Zentrum*. 2011. – [Online; Stand 11. November 2011]
- [5] LOUDON, Rodney: *The Quantum Theory of Light (Oxford Science Publications)*. 3. Oxford University Press, USA, 2000. – ISBN 9780198501763
- [6] SCHLATOW, Christian: *Quantenstatistik der Fluoreszenz einzelner NV-Störstellen in Diamant*, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2009
- [7] WIKIPEDIA: *Photon bunching*. 2010. – [Online; accessed 11-November-2011]
- [8] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 4: Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 3., überarbeitete Auflage. Springer, Berlin, 2009. – ISBN 9783642015977
- [9] BROWN, RH ; TWISS, RQ: Correlation between photons in 2 coherent beams of light. In: *NATURE* 177 (1956), Nr. 4497, S. 27–29. <http://dx.doi.org/10.1038/177027a0>. – DOI 10.1038/177027a0. – ISSN 0028–0836
- [10] WIKIPEDIA: *Hanbury Brown and Twiss effect*. 2011. – [Online; accessed 11-November-2011]
- [11] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. 5., überarb. u. erw. Aufl. Springer, Berlin, 2008. – ISBN 9783540682103
- [12] WIKIPEDIA: *Numerische Apertur*. 2011. – [Online; Stand 11. November 2011]
- [13] WIKIPEDIA: *Raumfilter (Optik)*. 2010. – [Online; Stand 11. November 2011]