

Elektronikpraktikum im WS 2010/11

UNIVERSITÄT STUTTGART

Protokoll zum Versuch

V08: Filterschaltungen mit Operationsverstärkern

Stephan Ludwig, Nicolai Lang

19. Dezember 2010

Zusammenfassung

Der folgende Versuch befasst sich mit den Eigenschaften und Beschränkungen differenzierender und integrierender Schaltungen auf Basis von Operationsverstärkern. Des Weiteren wird der mit einem Operationsverstärker aufgebaute selektive Filter (Bandpass) untersucht. Hierfür werden die Frequenzgänge von Phasenverschiebung und Verstärkung bei unterschiedlichen Dämpfungsgraden analysiert. Abschließend wird der auf hohe Güte getrimmte Frequenzfilter zur Fourieranalyse verschiedener Signale eingesetzt.

Verfasser	Lang, Nicolai (2439501, B.Sc. Physik)
Mitarbeiter	Ludwig, Stephan (2526605, B.Sc. Physik)
Gruppennummer	1-16
Versuchstag	13. Dezember 2010
Betreuer	Torsten Rendler

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen	3
1.1. Getriebene Oszillatoren	3
1.1.1. Allgemeine Form und Lösung	3
1.1.2. Elektrischer Oszillator	3
1.2. Filter	4
1.2.1. Der Bandpass	4
1.2.2. Wichtige Kenngrößen	5
1.3. Fouriertransformation	5
1.3.1. Definition	5
1.3.2. Beispiele	6
1.4. Beispielrechnungen	7
2. Messprinzip, Schaltpläne und Versuchsablauf	8
2.1. Umkehr-Differentiator	8
2.2. Umkehr-Integrator	9
2.3. Gedämpfter Bandpass	10
2.4. Entdämpfter Bandpass	10
2.5. Signalanalyse mit dem Bandpass	11
3. Berechnungen & Formeln	13
4. Auswertung	14
4.1. Umkehr-Differentiator	14
4.1.1. Begrenzung der differenzierenden Eigenschaft	14
4.1.2. Einfluss des Innenwiderstandes	14
4.2. Umkehr-Integrator	17
4.2.1. Begrenzung der integrierenden Eigenschaft	17
4.2.2. Zweck des Parallelwiderstandes	19
4.3. Gedämpfter Bandpass	21
4.4. Entdämpfter Bandpass	24
4.5. Signalanalyse mit dem Bandpass	28
5. Fehlerrechnung	30
6. Zusammenfassung	31
A. Messwerte	33

1. Grundlagen

1.1. Getriebene Oszillatoren

1.1.1. Allgemeine Form und Lösung

Ein getriebener, gedämpfter Oszillator wird im Fall einer harmonischen Störung beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 := \frac{D}{m} \quad \gamma := \frac{b}{2m} \quad \alpha := \frac{F_0}{m} \quad (2)$$

erhält man

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

Nach dem Einschwingvorgang, in welchem die homogene Lösung einen Beitrag leistet, schwingt das System mit der Erregerfrequenz gemäß

$$x(t) = \hat{x}(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

Wobei die Phasenverschiebung zu

$$\phi = -\arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5)$$

und die frequenzabhängige Amplitude zu

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (6)$$

gegeben sind. Für die Eigenkreisfrequenz (Resonanzfrequenz) ω_0 des Systems erlangt die Amplitude ihr Maximum, dessen Größe empfindlich von der Dämpfung γ abhängt. Im Falle von $\omega = \omega_0$ spricht man von *Resonanz*. Gilt zusätzlich $\gamma = 0$ divergiert $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \hat{x}(\omega)$ und man spricht von einer *Resonanzkatastrophe*.

1.1.2. Elektrischer Oszillator

Der elektrische RLC-Schwingkreis besteht aus einem ohmschen Widerstand R , einer Induktivität L und einer Kapazität C welche im einfachsten Fall geschlossen in Reihe geschaltet sind. Am Kondensator kann die Erregerspannung angelegt werden. Dieses System gehorcht gemäß Maschenregel der Differentialgleichung

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = F_0(t) \quad \Rightarrow \quad L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{F}_0(t) \quad (7)$$

Damit entspricht die Differentialgleichung der eines (mechanischen) getriebenen, gedämpften Oszillators. Die Lösungen ergeben sich daher in völliger Analogie zum oben behandelten Fall. Die Entsprechungen sind dabei durch

$$L \hat{=} m \quad \text{träges Moment} \quad (8)$$

$$R \hat{=} b \quad \text{dämpfendes Moment} \quad (9)$$

$$C \hat{=} D^{-1} \quad \text{rückstellendes Moment} \quad (10)$$

gegeben.

Der typische Schwingkreis ist aber nur eine spezielle Realisierung des elektrischen Oszillators. Dieser lässt sich allgemein durch ein System beschreiben, welches zur Rückkopplung fähig ist (schematisch in Abb. 1 dargestellt). Um oszillationsfähig zu sein muss dabei die *Oszillationsbedingung*

$$V \cdot k = 1 \quad (11)$$

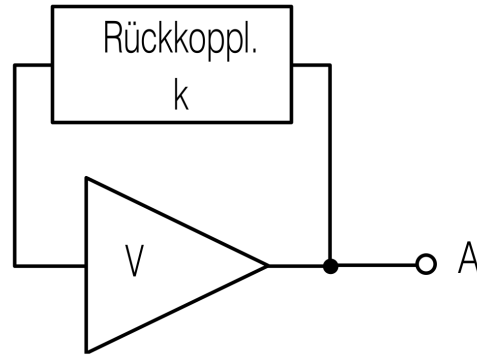


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines Oszillators.

erfüllt sein. Hier ist V die (komplexe) Verstärkung und k die komplexe Dämpfung der Rückkopplung. In Worten: Die komplexe Schleifenverstärkung muss 1 sein. Diese Bedingung lässt sich in die Bedingungen $|V| \cdot |k| = 1$ (Amplitudenbedingung) und $\arg V + \arg k = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (Phasenbedingung) umschreiben. Demnach muss sowohl Amplitude als auch Phase eines Signals, das den Oszillator einmal durchlaufen hat, dem des Eingangssignals entsprechen.

1.2. Filter

1.2.1. Der Bandpass

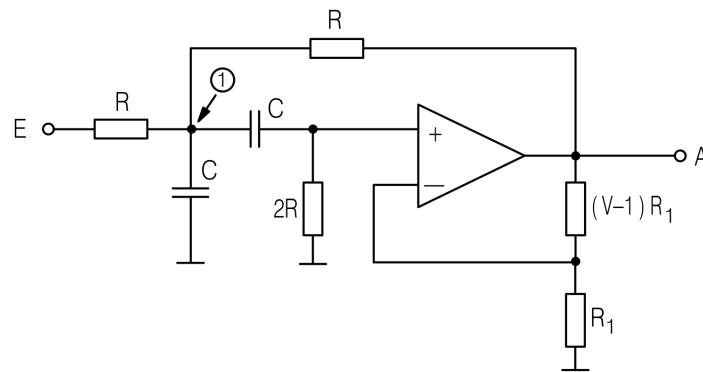


Abbildung 2: Schaltplan des Bandpasses.

In Abb. 2 ist ein sog. Bandpass oder selektiver Filter dargestellt. Dieser besitzt für unterschiedliche Eingangsfrequenzen verschiedene komplexe Verstärkungen. Variierende Beträge der Verstärkung führen zu unterschiedlichen Ausgangsamplituden der Signale während variierende Phasen eine Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal erzeugen. Eine Anwendung der Knotenregel liefert die komplexe Übertragungsfunktion

$$U_a = U_e \cdot \frac{j\omega\tau V}{1 + (3 - V)j\omega\tau - \omega^2\tau^2} \tag{12}$$

Wobei $\tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$ und j die imaginäre Einheit ist. Für die reelle Verstärkung (ohne Berücksichtigung

der Phasenverschiebung) V ergibt sich demnach

$$V_{SF}(\omega) = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{\omega\tau V}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + ((3 - V)\omega\tau)^2}} \quad (13)$$

Für kleine Kreisfrequenzen ω gilt näherungsweise $V \propto \omega$ während bei Frequenzen weit über der Resonanzfrequenz $V \propto \omega^{-1}$ Gültigkeit erlangt. Die Phasenverschiebung zwischen U_a und U_e beginnt für kleine Frequenzen bei $\frac{\pi}{2}$ und strebt für steigende Frequenzen asymptotisch gegen $-\frac{\pi}{2}$. Auf Grund der Verstärkungsfunktion lässt der Bandpass nur Frequenzen innerhalb eines von der Beschaltung abhängigen Frequenzbandes passieren während alle anderen Frequenzen gedämpft werden. Durch entsprechende Beschaltung kann die oben erläuterte Oszillationsbedingung erfüllt werden, da auch hier eine Rückkopplung vorliegt. Ist dies der Fall verliert der Filter seine ihm zugeordnete Funktion und verhält sich als elektrischer Oszillator. Gleichzeitig wird die Bandbreite in welcher Frequenzen nennenswert passieren können für Verstärkungen V nahe der Amplitudenbedingung besonders schmal. Für Filter mit hoher Frequenzauflösung muss daher eine Konfiguration nahe am Oszillationslimit gewählt werden.

1.2.2. Wichtige Kenngrößen

Die **maximale Verstärkung** des Bandpasses wird im Resonanzfall $\omega = \omega_0$ erreicht und errechnet sich nach Gleichung (13) zu

$$V_{SF}(\omega_0) = \frac{V}{3 - V} \quad (14)$$

Sie hängt damit nur von der eingestellten Verstärkung ab und gibt an, mit welcher Verstärkung Eingangssignale der Resonanzfrequenz an den Ausgang weitergegeben werden. Für $V = 3$ divergiert die Verstärkung des Filters bei Resonanz. Dies entspricht der völligen Aufhebung der Dämpfung und gleicht daher der oben beschriebenen Resonanzkatastrophe.

Die **Bandbreite** (oder auch Halbwertsbreite) des selektiven Filters ist definiert als der Abstand zwischen den beiden Kreisfrequenzen ω_- und ω_+ für welche die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal gerade $\pm\frac{\pi}{4}$ beträgt. Die Bandbreite entspricht dem FWHM der Übertragungsfunktion der Energie bzw. der quadrierten Übertragungsfunktion der Verstärkung. Elementare Rechnung ergibt

$$\Delta\omega = \frac{3 - V}{\tau} = (3 - V) \cdot \omega_0 \quad (15)$$

Mit $\tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$ der inversen Resonanzkreisfrequenz.

Die **Güte** eines Filters ist ein Maß für seine Frequenzselektivität. Je größer die Güte, desto schmaler und höher fällt der Resonanzpeak der Verstärkung aus. Folglich weisen Frequenzfilter mit hohen Gütezahlen ein hohes Frequenzauflösungsvermögen auf. Die Güte lässt sich berechnen durch

$$G = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3 - V} \quad (16)$$

Sie hängt ebenfalls nur von der Verstärkung V ab und lässt sich durch Variation der Widerstände des Rückkopplungszweiges einstellen. Im Falle der Amplitudenbedingung $V \rightarrow 3$ divergiert die Güte, da die Bandbreite $\Delta\omega$ gegen Null konvergiert.

1.3. Fouriertransformation

1.3.1. Definition

Im einfachsten Fall der L^1 -Fouriertransformation sei eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann ist die Fouriertransformierte definiert durch

$$\mathcal{F}[f](t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-itx} dx \quad (17)$$

Ist $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert die inverse Fouriertransformierte mit

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](t) e^{ixt} dt \tag{18}$$

Oft müssen Messreihen aus endlich vielen, diskreten Werten spektral analysiert werden. Hierfür definiert man die diskrete Fouriertransformation (DFT), welche in einer speziellen Implementierung auch FFT (*Fast-Fourier-Transformation*) genannt wird.

Sei $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ (dies könnte z.B. eine Messreihe aus N aufgenommenen Spannungswerten eines Zeitsignals sein). Dann ist die diskrete Fouriertransformierte gegeben durch

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{N-1}) \quad \text{mit} \quad \hat{x}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \cdot \frac{j \cdot k}{N}} \cdot x_j \tag{19}$$

Auch hierfür existiert eine Rücktransformierte.

Die Fouriertransformation (ob kontinuierlich oder diskret) zerlegt eine Funktion in ihre spektralen Anteile. Die Fouriertransformierte ist also eine Funktion der Frequenz, welche angibt, mit welchem Gewicht eine harmonische Schwingung eben dieser Frequenz aufsummiert (bzw. integriert) werden muss, um die ursprüngliche Funktion zu erhalten. Dabei gilt: Je "glatter" und "sinus- bzw. cosinusförmiger" eine Funktion ist, desto schärfer wird der Peak der Fouriertransformierten im Frequenzraum. Umgekehrt: Funktionen mit Unstetigkeiten (z.B. Sprüngen) enthalten sehr viele verschiedene Frequenzen und erfordern daher ein breites, langsam abfallendes Spektrum im Frequenzraum.

1.3.2. Beispiele

Rechteckfunktion Das Spektrum einer Rechteckfunktion ist in Abb. 3 abgebildet. Es ergibt sich aus der Fourierreihe einer Rechteckfunktion, welche gegeben ist zu

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right] = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{2k-1} \tag{20}$$

Man erkennt sowohl an der Grafik als auch an der analytischen Darstellung der Fourierreihe, dass nur die ungeradzahigen Vielfachen der Grundfrequenz als Fourierkomponenten präsent sind. Des Weiteren fallen die Amplituden der Fourierkomponenten mit höheren Ordnungen ab.

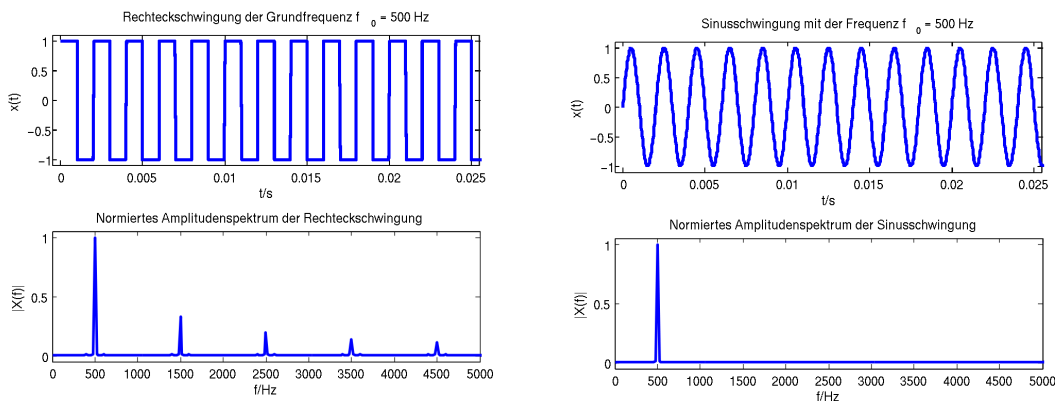


Abbildung 3: Verlauf und Spektrum eines Rechteck- und eines Sinussignals (Quelle: Wikipedia).

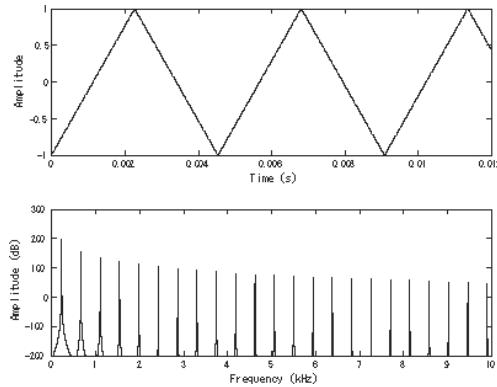


Abbildung 4: Verlauf und Spektrum eines Dreiecksignals (Quelle: Wikipedia).

Sinussfunktion Das Spektrum einer Sinusfunktion ist in Abb. 3 abgebildet. Da die Fourierreihe eines Sinus trivial ist (er ist Element der Funktionenbasis in welche entwickelt wird), besteht das Spektrum aus einem einzigen Peak bei der Grundfrequenz:

$$f(t) = \sin \omega t \tag{21}$$

In der Grafik ist gut zu erkennen, dass es keine weiteren Oberschwingungen gibt.

Dreieckfunktion Das Spektrum einer Dreieckfunktion ist in Abb. 4 dargestellt. Wie bei der Rechteckfunktion gibt es Oberschwingungen mit ungeradzahigen Vielfachen der Grundfrequenz. Die Fourierreihe lautet

$$f(t) = -\frac{8h}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right] = -\frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\omega t)}{(2k-1)^2} \tag{22}$$

Im Gegensatz zur Rechteckfunktion fallen die Amplituden bei der Dreieckfunktion schneller – nämlich mit $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ – ab.

1.4. Beispielrechnungen

In Abbildung 5 wurden einige Messpunkte der Auslenkung eines gedämpften, getriebenen Drehpendels gegen die Frequenz aufgetragen. Als gedämpfter Oszillator gehorcht die Amplitude einer Gleichung der Form

$$f_{\alpha, \omega_0, \gamma}(\nu) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2\pi\nu)^2)^2 + (4\gamma\pi\nu)^2}} \tag{23}$$

Führen wir mit einer solchen Funktion einen Fit durch ergibt sich die in Abb. 5 eingezeichnete Funktion. `gnuplot` liefert die Fitparameter $\alpha = 35.2177$, $\omega_0 = 8.52319$ und $\gamma = 0.0362676$. Hierbei ist ω_0 die Resonanzfrequenz des gedämpften Oszillators (in den entsprechenden Einheiten, die hier nicht von Belang sind). γ ist die Dämpfung der Schwingung und kann als Maß für die angreifenden dissipativen Kräfte am Oszillator gedeutet werden.

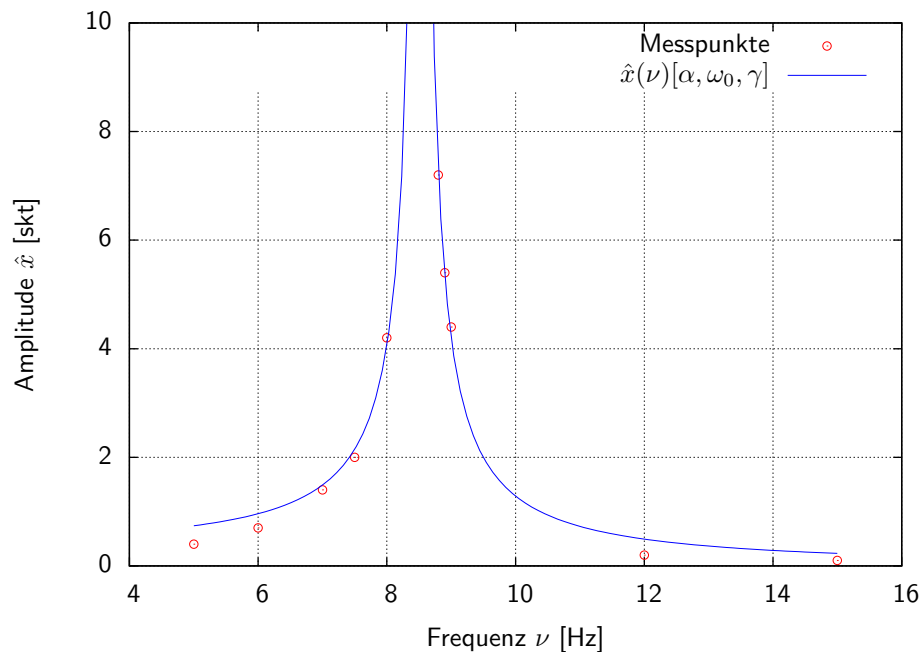


Abbildung 5: Resonanzkurve einer gedämpften erzwungenen Schwingung (Drehpendel).

2. Messprinzip, Schaltpläne und Versuchsablauf

2.1. Umkehr-Differentiator

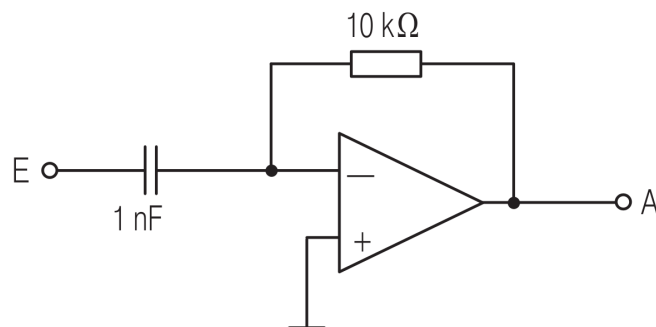


Abbildung 6: Schaltplan des Umkehr-Differentiators.

Messprinzip und Versuchsaufbau Die Schaltung wird gemäß Abb. 6 aufgebaut, wobei der 1nF-Kondensator durch einen $0.1\mu\text{F}$ -Kondensator ersetzt wird. Der Eingang wird mit dem Signalgenerator und CH1 des Oszilloskops verbunden. Der Ausgang wird an CH2 des Oszilloskops angeschlossen. Des Weiteren wird der Triggerausgang des Signalgenerators mit dem Oszilloskop verbunden um eine stabile Triggerrung zu gewährleisten.

Versuchsablauf Zu Beginn wird der Signalgenerator auf $U_{pp} = 2.0V_{pp}$ (High-Impedance), $\nu \approx 500\text{Hz}$ und Sinussignal gestellt. Am Oszilloskop werden Ein- und Ausgangssignal verglichen

um die Wirkung der Schaltung als Differenzierer zu verifizieren. Anschließend wird die Frequenz nach oben und unten variiert um die Begrenzung der differenzierenden Wirkung auszumessen. Das Vorgehen wird mit LabVIEW (`oszisnapshot.vi`) dokumentiert. Diese Messungen werden anschließend mit den Signaltypen **Rechtecksignal** und **Dreiecksignal** durchgeführt.

Im zweiten Teil des Versuches wird zwischen Signalgenerator und Schaltungseingang ein $1\text{k}\Omega$ -Widerstand in Reihe geschaltet. Die Auswirkungen des nun erhöhten Innenwiderstandes der Signalquelle werden analysiert, indem die oben beschriebenen Messungen für die drei Signaltypen von neuem durchgeführt werden. Die quantitativen Auswirkungen werden mit LabVIEW dokumentiert.

Geräte $10\text{k}\Omega$ -Widerstand, $1\text{k}\Omega$ -Widerstand, $0,1\mu\text{F}$ -Kondensator, Operationsverstärker OP27G, Keithley 3390 (Funktionsgenerator), Tektronix (Digitaloszilloskop, 2 Kanäle), Steckbrett mit Spannungsquelle. ◀

2.2. Umkehr-Integrator

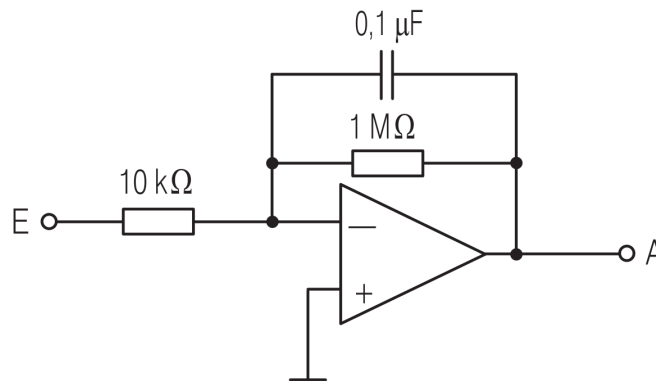


Abbildung 7: Schaltplan des Umkehr-Integrators.

Messprinzip und Versuchsaufbau Die Schaltung wird gemäß Abb. 7 aufgebaut. Der Eingang wird mit dem Signalgenerator und CH1 des Oszilloskops verbunden. Der Ausgang wird an CH2 des Oszilloskops angeschlossen. Des Weiteren wird der Triggenergang des Signalgenerators mit dem Oszilloskop verbunden um eine stabile Triggerung zu gewährleisten.

Versuchsablauf Im ersten Teil des Versuches werden alle Messungen, die beim Umkehr-Differentiator durchgeführt wurden, wiederholt (bis auf den Abschnitt mit erhöhtem Innenwiderstand der Signalquelle, da dies nur einer Variation des $10\text{k}\Omega$ -Widerstandes gleichkommen würde).

Im zweiten Teil des Versuches wird der $1\text{M}\Omega$ -Widerstand entfernt. An den Ausgang wird das Tischmultimeter (Gleichspannungsmessung) angeschlossen, während der Eingang E mit GND verbunden wird. Der Verlauf der gemessenen Ausgangsspannung wird qualitativ beschrieben. Die Reaktion des Systems auf einen Kurzschluss des Kondensators durch eine Brücke wird untersucht.

Geräte $10\text{k}\Omega$ -Widerstand, $1\text{M}\Omega$ -Widerstand, $0,1\mu\text{F}$ -Kondensator, Operationsverstärker OP27G, Keithley 2100 (Tischmultimeter), Keithley 3390 (Funktionsgenerator), Tektronix (Digitaloszilloskop, 2 Kanäle), Steckbrett mit Spannungsquelle. ◀

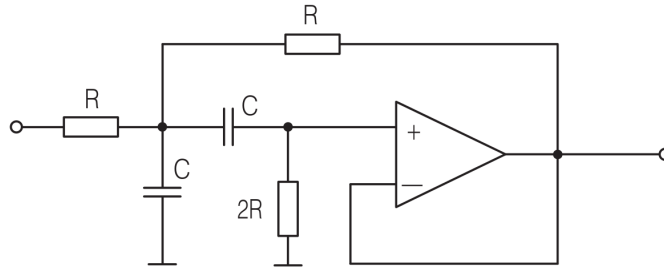


Abbildung 8: Schaltplan des gedämpften Bandpasses.

2.3. Gedämpfter Bandpass

Messprinzip und Versuchsaufbau Die Schaltung wird gemäß Abb. 8 aufgebaut ($R = 100\text{k}\Omega$, $C = 1\text{nF}$). Der Eingang wird mit dem Signalgenerator und CH1 des Oszilloskops verbunden. Der Ausgang wird an CH2 des Oszilloskops angeschlossen. Des Weiteren wird der Triggenergang des Signalgenerators mit dem Oszilloskop verbunden um eine stabile Triggerung zu gewährleisten.

Versuchsablauf Mit Hilfe von LabVIEW wird der Frequenzgang von Phasenverschiebung und Verstärkung automatisch erfasst. Als Frequenzbereich wird dabei $10\text{Hz} \leq \nu \leq 10\text{kHz}$ gewählt (Sinussignal, U_{pp} muss u.U. variiert werden, bis die automatische Erfassung der Daten problemlos funktioniert).

Geräte $100\text{k}\Omega$ -Widerstand (4x), 1nF -Kondensator (2x), Operationsverstärker OP27G, Keithley 3390 (Funktionsgenerator), Tektronix (Digitaloszilloskop, 2 Kanäle), Steckbrett mit Spannungsquelle. ◀

2.4. Entdämpfter Bandpass

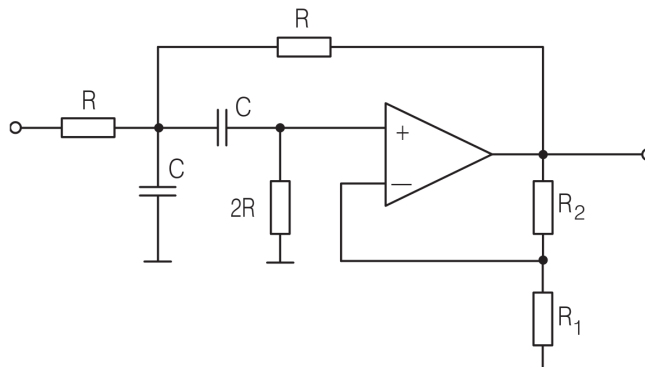


Abbildung 9: Schaltplan des entdämpften Bandpasses.

Messprinzip und Versuchsaufbau Die Schaltung wird gemäß Abb. 9 aufgebaut ($R = 100\text{k}\Omega$, $C = 1\text{nF}$, $R_2 = 10\text{k}\Omega$). Der Eingang wird mit dem Signalgenerator und CH1 des Oszilloskops verbunden. Der Ausgang wird an CH2 des Oszilloskops angeschlossen. Des Weiteren wird der Triggenergang des Signalgenerators mit dem Oszilloskop verbunden um eine stabile Triggerung

zu gewährleisten. Der Widerstand R_1 wird durch eine Widerstandsdekade repräsentiert und ist damit variabel.

Versuchsablauf Der Signalgenerator wird auf **Sinussignal** gestellt. Frequenz und Amplitude des Signals werden so gewählt, dass der Operationsverstärker im Resonanzfall *nicht* durch die Betriebsspannung begrenzt wird. Durch Variation von R_1 wird die Verstärkung V so eingestellt, dass die Schaltung durch Entdämpfung oszillationsfähig wird. Der hierfür nötige Widerstand wird notiert. Danach wird R_1 leicht erhöht, sodass der Filter seine Oszillationsfähigkeit gerade verliert (durch Variation der Frequenz um die Resonanzfrequenz herum testen!). Anschließend wird mit Hilfe von LabVIEW der Frequenzgang von Phasenverschiebung und Verstärkung automatisch erfasst. Als Frequenzbereich wird dabei $1500\text{Hz} \leq \nu \leq 1800\text{Hz}$ gewählt (**Sinussignal**, U_{pp} muss klein gewählt und u.U. variiert werden, bis die automatische Erfassung der Daten problemlos funktioniert).

Geräte 100k Ω -Widerstand (4x), 10k Ω -Widerstand, 1nF-Kondensator (2x), Widerstandsdekade, Operationsverstärker OP27G, Keithley 3390 (Funktionsgenerator), Tektronix (Digitaloszilloskop, 2 Kanäle), Steckbrett mit Spannungsquelle. ◀

2.5. Signalanalyse mit dem Bandpass

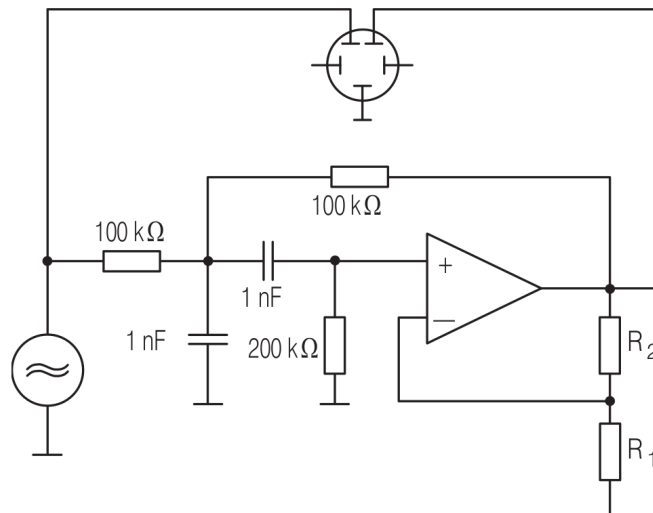


Abbildung 10: Schaltplan des entdämpften Bandpasses zur Signalanalyse.

Messprinzip und Versuchsaufbau Die Schaltung wird gemäß Abb. 10 aufgebaut ($R_2 = 10\text{k}\Omega$). Der Eingang wird mit dem Signalgenerator und CH1 des Oszilloskops verbunden. Der Ausgang wird an CH2 des Oszilloskops angeschlossen. Des Weiteren wird der Triggerausgang des Signalgenerators mit dem Oszilloskop verbunden um eine stabile Triggerung zu gewährleisten. Der Widerstand R_1 wird durch eine Widerstandsdekade repräsentiert und auf den im vorigen Versuch ermittelten Wert für nahresonante Verstärkung eingestellt.

Versuchsablauf Der mit den Daten aus dem vorigen Versuch auf hohe Güte eingestellte selektive Frequenzfilter wird nun zur Fourieranalyse benutzt. Hierfür wird der Signalgenerator nacheinander auf **Sinussignal**, **Rechtecksignal** und **Dreiecksignal** gestellt. Zu Beginn wird die zuvor ermittelte Resonanzfrequenz eingestellt und die Amplitude des Ausgangssignals gemessen. Anschließend

wird die Eingangssignalfrequenz so lange reduziert, bis das Ausgangssignal ein weiteres Maximum erreicht. Die Amplitude wird vermessen. Auf diese Weise werden Frequenzen und Amplituden der ersten drei Fourierkomponenten der drei Signaltypen ermittelt.

Geräte 100k Ω -Widerstand (4x), 10k Ω -Widerstand, 1nF-Kondensator (2x), Widerstandsdekade, Operationsverstärker OP27G, Keithley 3390 (Funktionsgenerator), Tektronix (Digitaloszilloskop, 2 Kanäle), Steckbrett mit Spannungsquelle. ◀

3. Berechnungen & Formeln

Im Folgenden ist

- V : $[V] = 1$ die (reelle) Elektrometerverstärkung eines selektiven Filters.
- V_{SF} : $[V_{SF}] = 1$ die Verstärkung eines selektiven Filters (frequenzabhängig).
- V_{SF}^{max} : $[V_{SF}^{max}] = 1$ die Resonanzverstärkung eines selektiven Filters.
- $U_{a,e}$: $[U_{a,e}] = 1V$ die (u.U. komplexe) Ein- bzw. Ausgangsspannung.
- ω : $[\omega] = 1\frac{1}{s}$ die Kreisfrequenz des Eingangssignals.
- τ : $[\tau] = 1s$ die inverse Resonanzkreisfrequenz des Filters.
- ω_0 : $[\omega_0] = 1\frac{1}{s}$ die Resonanzkreisfrequenz des Filters.
- $\Delta\omega$: $[\Delta\omega] = 1\frac{1}{s}$ die Bandbreite/Halbwertsbreite des Filters.
- G : $[G] = 1$ die Güte des Filters.
- ν : $[\nu] = 1Hz$ die Frequenz des Eingangssignals.
- ν : $[\nu_0] = 1Hz$ die Resonanzfrequenz des Filters.

Bandpass Die komplexe Übertragungsfunktion des Bandpasses ist gegeben durch

$$U_a = U_e \cdot \frac{j\omega\tau V}{1 + (3 - V)j\omega\tau - \omega^2\tau^2} \quad (24)$$

Wobei $\tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$ und j die imaginäre Einheit ist. Für die reelle Verstärkung (ohne Berücksichtigung der Phasenverschiebung) V gilt dann

$$V_{SF}(\omega) = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{\omega\tau V}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + ((3 - V)\omega\tau)^2}} \quad (25)$$

Damit ergibt sich die (maximale) Verstärkung (ohne Phasenverschiebung) im Resonanzfall zu

$$V_{SF}(\omega_0) = V_{SF}^{max} = \frac{V}{3 - V} \quad (26)$$

Die Bandbreite (oder auch Halbwertsbreite) des selektiven Filters ist

$$\Delta\omega = \frac{3 - V}{\tau} = (3 - V) \cdot \omega_0 \quad (27)$$

Die Güte eines Filters ist ein Maß für seine Frequenzselektivität und damit für seine Qualität. Sie ist gegeben durch

$$G = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3 - V} \quad (28)$$

Weiterhin gilt allgemein die Beziehung

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (29)$$

4. Auswertung

4.1. Umkehr-Differentiator

4.1.1. Begrenzung der differenzierenden Eigenschaft

Die Abbildungen 11, 12, 13, 14 und 15 zeigen die Wirkung des Umkehr-Differentiators auf unterschiedliche Eingangssignale. In Abb. 11 ist das Ausgangssignal eines sinusförmigen Eingangssignales dargestellt. Offensichtlich erfüllt der Differentiator bei der gewählten Frequenz seine Aufgabe – die Ausgangsfunktion ist um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben. Betrachten wir das Eingangssignal als Sinus gibt der Umkehr-Differentiator einen negativen Kosinus als Signalverlauf aus. Die Inversion des Signals (i.e. der Ableitung) ist hierbei prinzipbedingt. Steigt die Frequenz des Ausgangssignales steigt auch die maximale Steilheit der Spannungsfanken (beim Sinus an den Nulldurchgängen). Demnach nimmt der Betrag der Ableitung (also auch die Ausgangsspannung) mit steigender Frequenz zu. Bei einer Frequenz von $\nu(1) \approx 2.32\text{kHz}$ erreicht die Ausgangsspannung die Betriebsspannung des OpAmps von $U_{\pm} = \pm 15\text{V}$. Für höhere Frequenzen stellt die Ausgangsspannung auf Grund der Begrenzung nur noch abschnittsweise die Ableitung der Eingangsfunktion dar.

Abbildung 12 zeigt die Ausgangsspannung bei einem anliegenden Rechtecksignal. Formal ergibt sich als Ableitung der Rechteckfunktion ein alternierender Kamm aus Delta-Distributionen. Der Differentiator nähert diese durch Delta-Peaks an, die konstruktionsbedingt bei jeder Frequenz an die Grenze der Betriebsspannung stoßen. Da der Differentiator die Ableitung auf dem gesamten Frequenzbereich nur näherungsweise darstellen kann ergibt sich keine Begrenzung von der Art, wie wir sie beim Sinussignal beobachten konnten. Abbildung 13 zeigt aber, dass die im idealfall “unendlich schmalen” Delta-Peaks auf Grund der endlichen Reaktionszeiten des OpAmps in Wirklichkeit eine minimale Ausdehnung auf der Zeitachse besitzen. Beim Erhöhen der Eingangsfrequenz nimmt das Verhältnis von Rechteckbreite zu Delta-Peak-Breite kontinuierlich zu. Demnach wird die Approximation der Ableitung durch “unendlich schmale” Peaks mit steigender Frequenz schlechter. In diesem Fall lässt sich keine wohldefinierte Grenzfrequenz angeben, bis zu der die differenzierende Eigenschaft aufrecht erhalten wird.

In Abbildung 14 ist das Ausgangssignal einer Dreieckfunktion dargestellt. Auch hier macht sich die Inversion bemerkbar, da fallende Flanken mit positiven Werten der Rechteckfunktion korrespondieren. Auf nichtdifferenzierbare Stellen der Eingangskurve (die “Spitzen”) reagiert das Ausgangssignal mit kleinen Spannungsspitzen. Erhöht man die Eingangsfrequenz steigt der Betrag der Flankensteilheit und damit die Ableitung stetig an. Ab einer Frequenz von $\nu(2) \approx 2.72\text{kHz}$ wird die Ausgangsspannung von der Versorgungsspannung begrenzt. Für diese Frequenzen stellt die Ausgangsspannung nicht mehr die Ableitung des Eingangssignals dar. Bei weiterer Erhöhung der Eingangsfrequenz sorgt die Slew-Rate des verwendeten OpAmps für eine Deformation des Rechtecksignals. Im Extremfall (siehe Abb. 15) wird das Rechtecksignal zum Dreiecksignal transformiert und die differenzierende Eigenschaft wird nicht einmal mehr der Form nach erhalten.

4.1.2. Einfluss des Innenwiderstandes

Die Abbildungen 16, 17 und 18 zeigen die Ausgangssignale des Umkehr-Differentiators bei Sinus-Rechteck- und Dreieckssignalen, wobei der Innenwiderstand der Signalquelle künstlich erhöht wurde.

Abbildung 16 zeigt das Ausgangssignal einer Sinusfunktion. Qualitativ entspricht die Ausgangsspannung der Ableitung des Eingangssignals. Wie man an Hand der genannten Abbildung erkennt, führt der höhere Innenwiderstand zu einer Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal, die dafür sorgt, dass letzteres schon bei niedrigen Frequenzen keine gute Näherung der Ableitung mehr darstellt. Die maximale Frequenz, bis zu der die Phasenverschiebung kaum ins Gewicht fällt wurde zu $\nu(3) \approx 0.37\text{kHz}$ bestimmt. Für alle höheren Frequenzen weicht die Ausgangsfunktion signifikant von der Ableitung der Eingangsfunktion ab. Die Phasenverschiebung ist in diesem Fall Konsequenz des durch den hohen Innenwiderstand erzeugten RC-Gliedes, das die für den Differentiator benötigte Drehung der Phase um $\frac{\pi}{2}$ verändert.

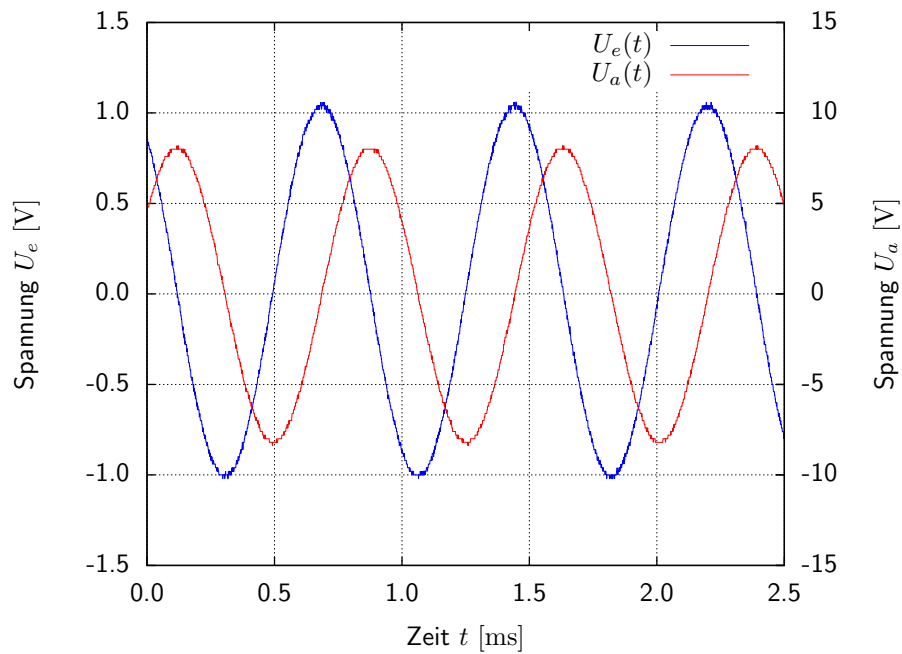


Abbildung 11: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Sinussignal ($\nu = 1.32\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0V_{pp}$).

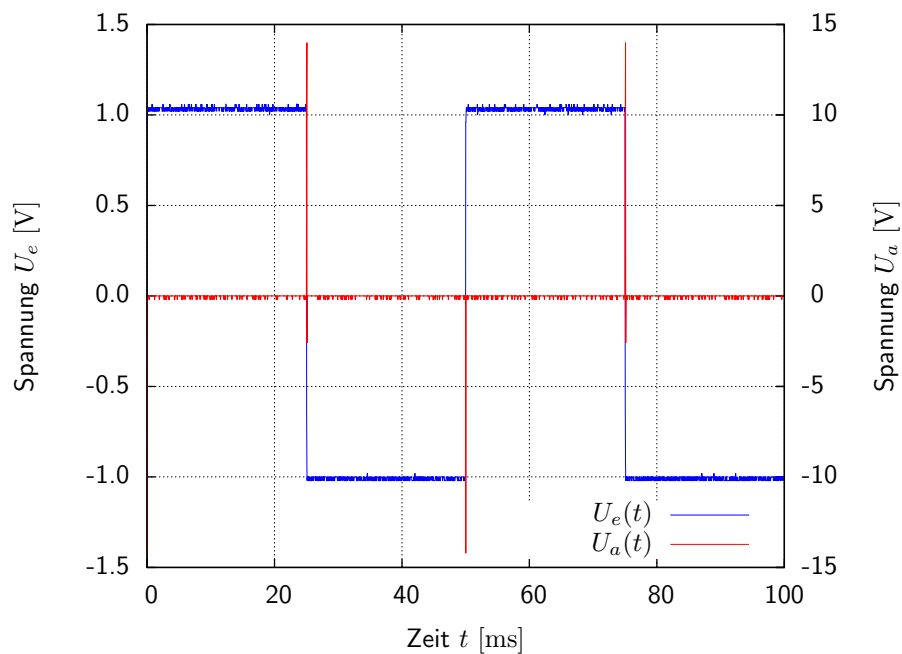


Abbildung 12: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Rechtecksignal ($\nu = 20.0\text{Hz}$, $U_{e,pp} = 2.0V_{pp}$).

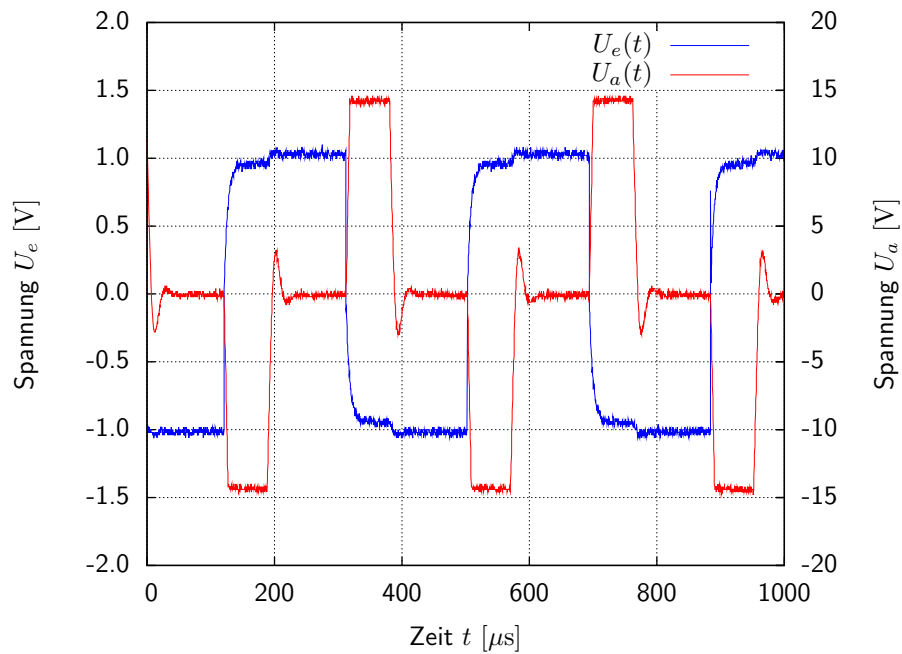


Abbildung 13: Relative Verbreiterung der Delta-Peaks bei hohen Frequenzen und einem Rechtecksignal am Eingang ($\nu = 2.62\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

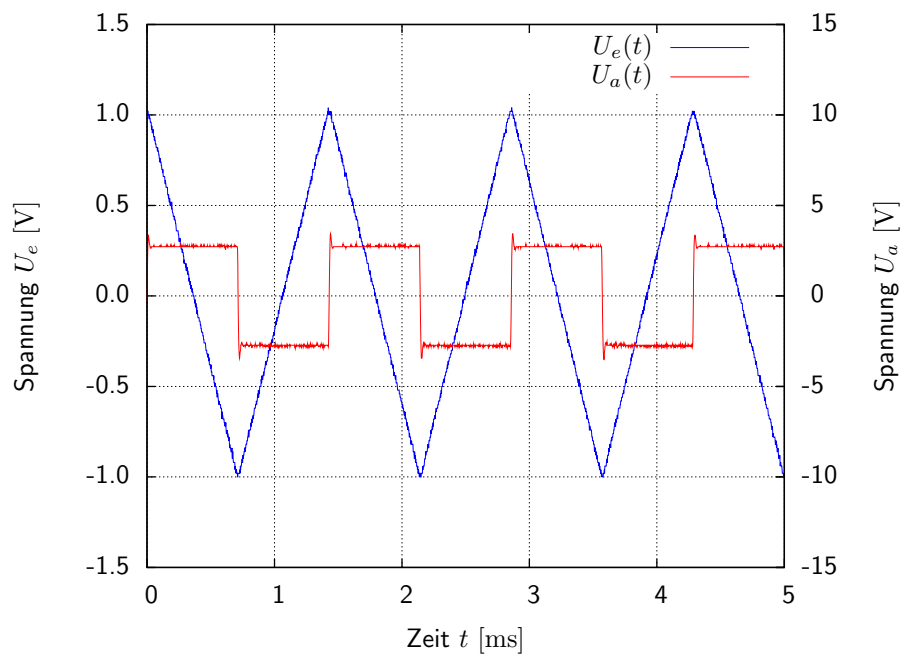


Abbildung 14: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Dreieckssignal ($\nu = 0.7\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

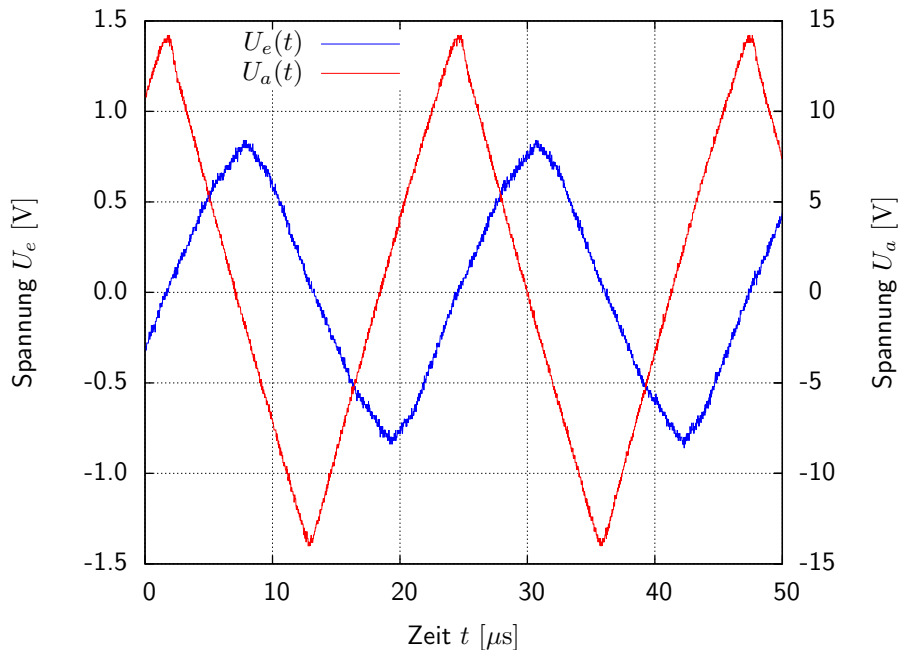


Abbildung 15: Auswirkung der Slew-Rate bei hohen Frequenzen und einem Dreieckssignal am Eingang ($\nu = 43.72\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

Im Falle des Rechtecksignals führt der höhere Innenwiderstand zu einem neuen Abfallverhalten der “Delta-Peaks” (siehe Abb. 17). Deren Abfall auf Null nach Erreichen eines Plateaus des Eingangssignals wird durch den höheren Widerstand verzögert und deformiert die Delta-Peaks so stark, dass diese nicht mehr als Approximation der Ableitung betrachtet werden können. Eine definierte Grenzfrequenz, ab welcher die differenzierende Eigenschaft verloren geht, ließ sich nicht ermitteln. Grund für die veränderten Ausgangssignale ist das durch den hohen Innenwiderstand der Stromquelle bestimmte Auf- und Entladeverhalten des Kondensators am Eingang des Umkehr-Differentiators.

Dieses nun verzögert ablaufende Auf- und Entladen führt auch zu dem in Abb. 18 dargestellten Ausgangssignal. Das ursprünglich vorhandene Rechtecksignal (als Ableitung des Dreiecksignals) wird auch bei niedrigen Frequenzen deformiert und stellt demzufolge keine gute Approximation der Ableitung mehr dar. Wegen der kontinuierlichen Deformation des Ausgangssignals ließ sich auch in diesem Fall keine objektiv bestimmbare Grenzfrequenz bestimmen.

Zusammenfassend lässt sich eine negative Auswirkung eines hohen Innenwiderstandes der Signalquelle auf die Qualität des differenzierten Signals und die Bandbreite, in der das Ausgangssignal eine gute Approximation der Ableitung darstellt, feststellen.

4.2. Umkehr-Integrator

4.2.1. Begrenzung der integrierenden Eigenschaft

Die Abbildungen 19, 20 und 21 zeigen die Ausgangssignale des Umkehr-Integrators für verschiedene Eingangssignaltypen.

Abbildung 19 zeigt das Ausgangssignal bei angelegter Sinusfunktion. Die integrierende Eigenschaft wird bei dieser Frequenz noch vollständig erfüllt, was man leicht durch Ableiten des Ausgangssignales (und Multiplikation mit -1) überprüft. Erhöht man die Eingangsfrequenz nimmt die Fläche unter den Kurvenstücken einer Periode stetig ab. Folglich sinkt die maximale am Ausgang

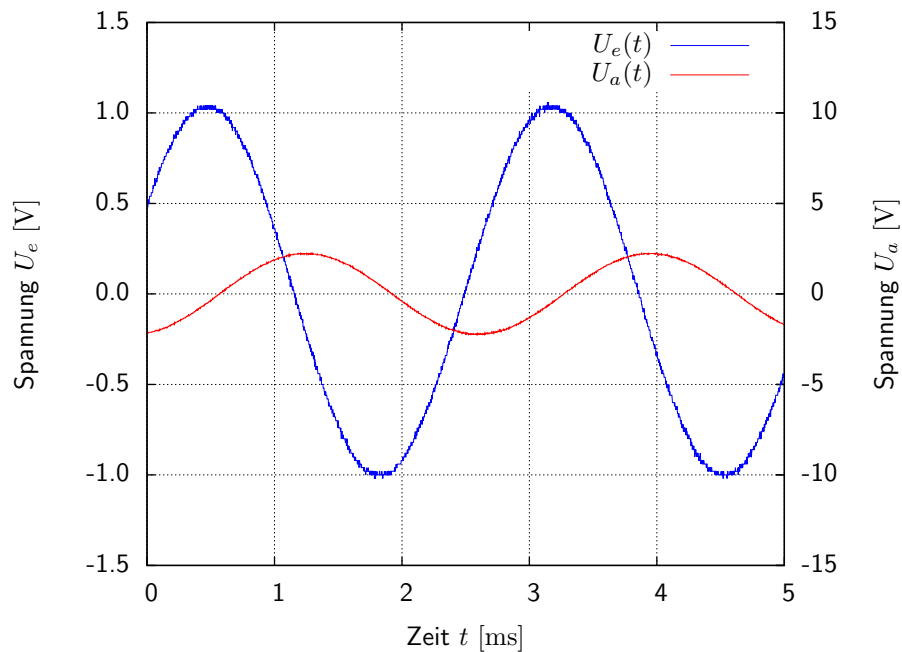


Abbildung 16: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Sinussignal mit erhöhtem Innenwiderstand der Spannungsquelle ($\nu = 0.37\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

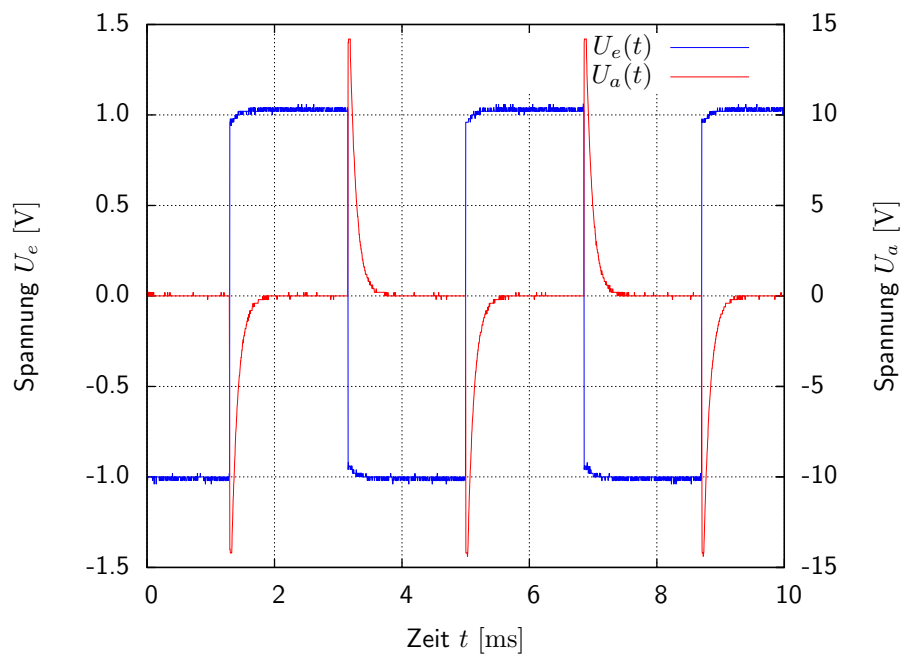


Abbildung 17: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Rechtecksignal mit erhöhtem Innenwiderstand der Spannungsquelle ($\nu = 0.27\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

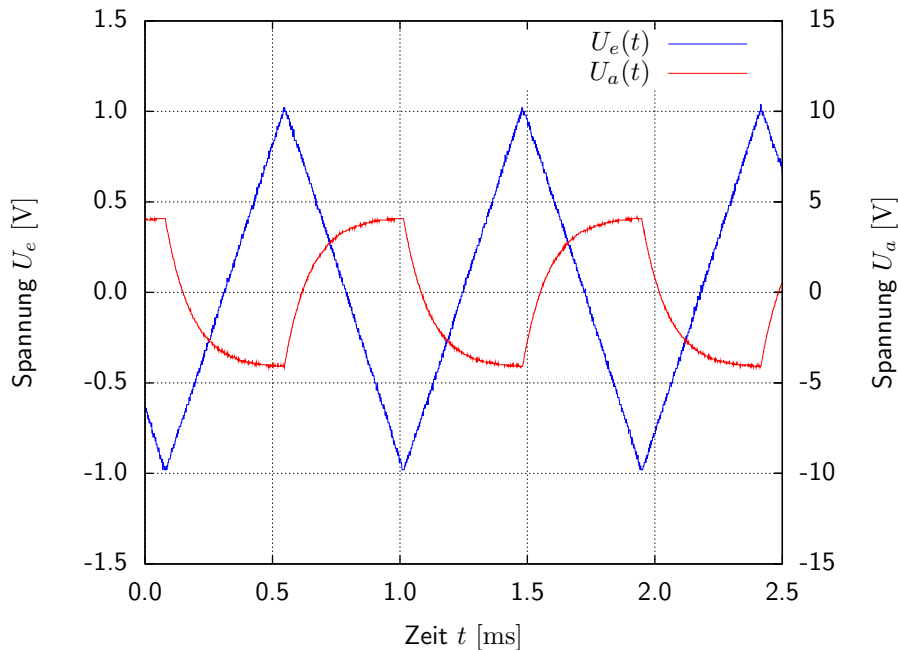


Abbildung 18: Wirkung des Umkehr-Differentiators auf ein Dreieckssignal mit erhöhtem Innenwiderstand der Spannungsquelle ($\nu = 1.07\text{kHz}$, $U_{e,pp} = 2.0\text{V}_{pp}$).

gemessene Spannung und das Ausgangssignal läuft Gefahr vom Rauschen der Schaltung verzerrt und letztlich absorbiert zu werden. Im Gegensatz zum schon betrachteten Umkehr-Differenzierer wird der Umkehr-Integrator bei *niedrigen* Frequenzen durch die Betriebsspannung limitiert. Ab einer Frequenz von $\nu(4) \approx 11.6\text{Hz}$ wächst die Fläche unter der Kurve einer halben Sinusschwingung über einen kritischen Wert, sodass das Integral-Signal am Ausgang einen Betrag $\geq 15\text{V}$ besitzen müsste. Demnach geht die integrierende Eigenschaft für Frequenzen unter obiger Grenzfrequenz verloren.

In Abb. 20 ist das Ausgangssignal bei angelegter Rechteckspannung aufgetragen. Bei der dargestellten Frequenz wird die Betriebsspannung vom Ausgangssignal gerade erreicht. Demnach entspricht das Ausgangssignal für Frequenzen unter $\nu(5) \approx 18.0\text{Hz}$ nicht mehr dem Integral des Eingangssignals.

Analog wurde in Abb. 21 gerade jene Frequenz gewählt, bei der die Ausgangsspannung an die von der Betriebsspannung auferlegte Grenze stößt. Für Frequenzen unter $\nu(6) \approx 8.9\text{Hz}$ verliert das Ausgangssignal die gewünschte Eigenschaft. Das in Abb. 21 dargestellte Ausgangssignal ähnelt nur auf den ersten Blick einem Sinussignal, da sich dieser für niedrige Ordnungen durch Parabeln approximieren lässt. Aus mathematischer Sicht lässt sich die Funktion sofort als alternierende Aneinanderreihung von Parabeln identifizieren.

4.2.2. Zweck des Parallelwiderstandes

Entfernt man in Abb. 7 den Parallelwiderstand zum Kondensator und legt den Eingang E auf GND (verbindet ihn also u.A. mit dem nichtinvertierenden Eingang), so lässt sich eine kontinuierlich steigende Ausgangsspannung am Integrator beobachten. Schließt man den Kondensator mit einer Brücke kurz, fällt die Ausgangsspannung instantan auf nahezu 0V zurück um kurz darauf erneut anzusteigen. Bei eingebautem Parallelwiderstand bleibt dieser Anstieg der Ausgangsspannung aus und diese stagniert auf einem Niveau nahe 0V.

Grund für die beobachtbare Integration bei fehlendem Eingangssignal sind die Offsetströme,

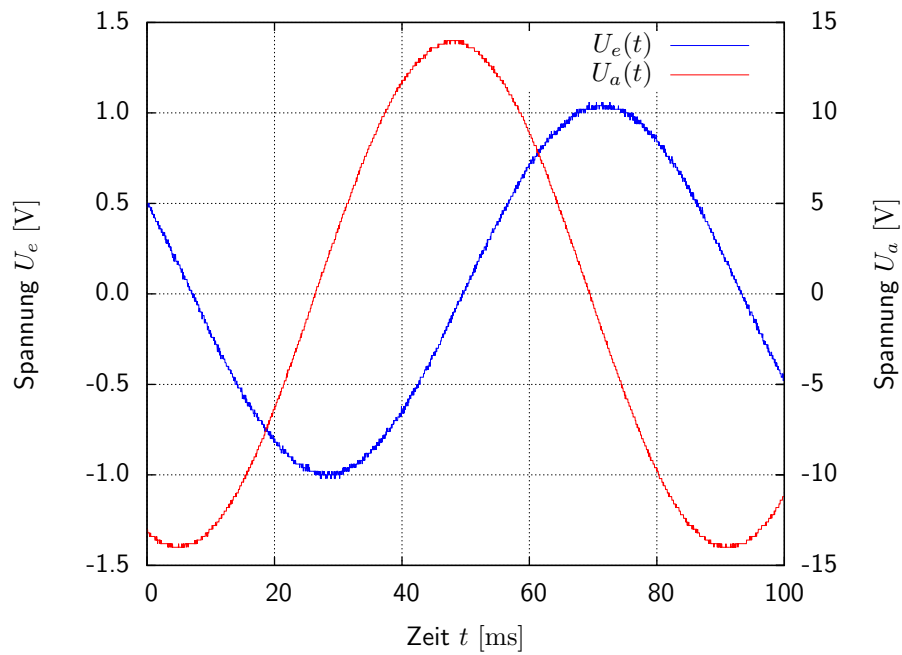


Abbildung 19: Wirkung des Umkehr-Integrators auf ein Sinussignal ($\nu = 11.6\text{Hz}$, $U_{e,pp} = 2.0V_{pp}$).

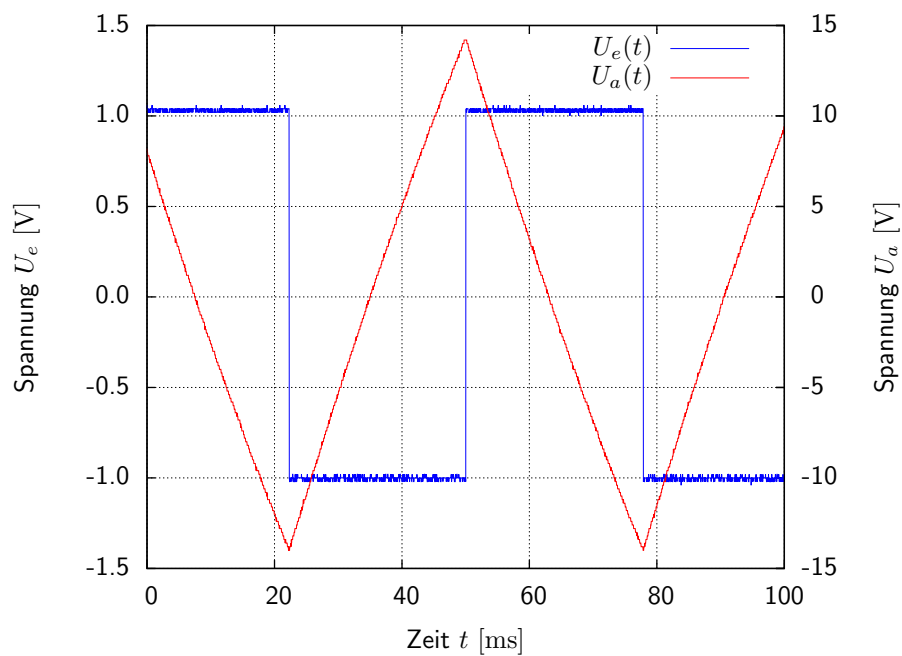


Abbildung 20: Wirkung des Umkehr-Integrators auf ein Rechtecksignal ($\nu = 18.0\text{Hz}$, $U_{e,pp} = 2.0V_{pp}$).

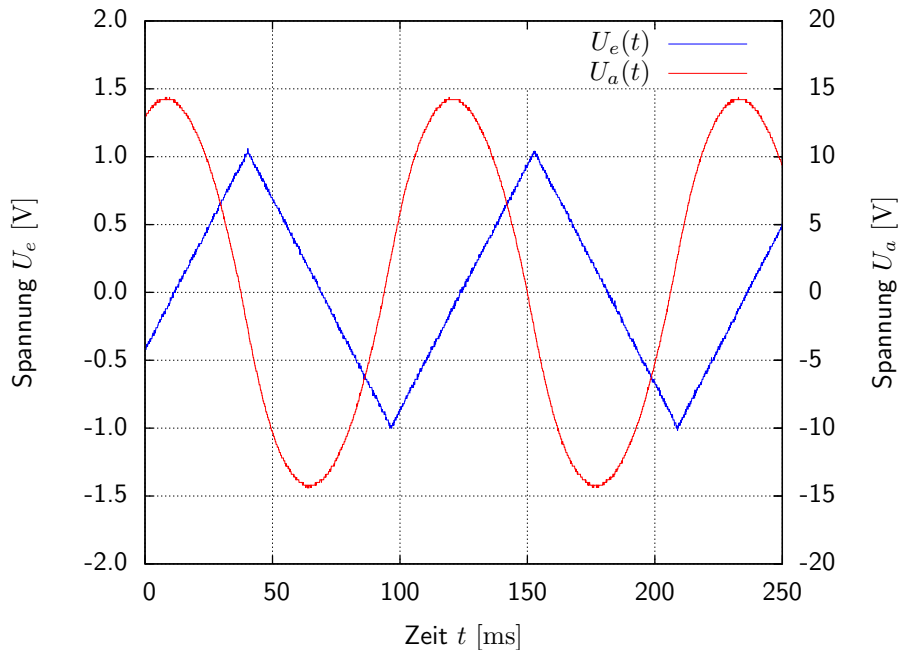


Abbildung 21: Wirkung des Umkehr-Integrators auf ein Dreieckssignal ($\nu = 8.9\text{Hz}$, $U_{e,pp} = 2.0V_{pp}$).

die jeder reale Operationsverstärker an seinen beiden Eingängen aufweist. Dieser (geringe) Strom aus dem invertierenden Eingang lädt den Kondensator mit der Zeit auf und erzwingt damit einen Anstieg der Ausgangsspannung um die erzeugte Potentialdifferenz auszugleichen. Dieser Anstieg führt aber zu einer erhöhten Potentialdifferenz am Kondensator, welche weiterhin dafür sorgt, dass die am invertierenden Eingang austretenden Ströme in den Kondensator fließen. Auf diese Weise sammelt sich "Integrationsfläche" an, obwohl kein Signal am Eingang anliegt. Der parallel geschaltete Widerstand behebt dieses Problem, indem er den Kondensator langsam entlädt und so einem Anstieg der im Kondensator gespeicherten Ladung entgegenwirkt.

4.3. Gedämpfter Bandpass

Die folgenden Messungen wurden mit einem selektiven Frequenzfilter (Bandpass) durchgeführt, dessen Verstärkung auf $V = 1$ eingestellt war. Die Schleifenverstärkung war daher kleiner als Eins was zu einer Verletzung der Oszillationsbedingung (genauer: Amplitudenbedingung) führt. Der vorliegende Filter ist demnach *nicht* oszillationsfähig und weist eine geringe Güte auf.

Die Abbildungen 22, 23 und 24 bilden die Frequenzgänge von Phase und Ausgangsamplitude (bzw. Verstärkung) ab. In Abbildung 22 ist der Frequenzgang der Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal dargestellt. Für kleine Frequenzen beträgt die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal $\sim 90^\circ$. Diese steigt mit zunehmender Frequenz um $\sim 180^\circ$ bis auf $\sim 270^\circ$ an.

Die Abbildungen 23 und 24 zeigen den Phasengang der Verstärkung (mit linearer bzw. logarithmischer ν -Achse). Gemäß Gleichung (25) erwarten wir einen linearen Anstieg der Verstärkung für kleine Frequenzen und einen Abfall der Verstärkung wie ω^{-1} für große Frequenzen. Qualitativ lässt sich dieses Verhalten mit Abbildung 23 verifizieren, während in logarithmischer Darstellung der "Resonanzpeak" deutlich erkennbar ist.

Um die Parameter des untersuchten Filters zu bestimmen setzen wir nach Gleichung (25) eine

Fitfunktion vom Typ

$$f_{a,b}(\nu) = \frac{2\pi\nu \cdot a \cdot b}{\sqrt{(1 - 4\pi^2\nu^2a^2)^2 + (2\pi(3 - b)\nu a)^2}} \quad (30)$$

an. In den Abb. 23 und 24 wurde diese Funktion an die Messdaten gefittet. `gnuplot` liefert die Fitparameter $a(1) = 0.097415$ und $b(1) = 0.964803$. Hierbei ist zu beachten, dass der Fit für einen Datensatz mit $[\nu] = 1\text{kHz}$ durchgeführt wurde. Daher folgt $\tau(1) = a(1) \cdot 10^{-3}\text{s} \approx 0.97 \cdot 10^{-4}\text{s}$, $V_g = b(1) \approx 0.96$ und $\nu_0(1) = \frac{1}{2\pi \cdot \tau(1)} \approx 1.634\text{kHz}$. Ein Vergleich mit den theoretischen Werten $\tau^* = RC = 1 \cdot 10^{-4}$ und $V_g^* = 1.0$ ergibt eine gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment. Diese Verifikation der Theorie drückt sich auch in dem offensichtlich präzisen Fit in den Abbildungen 23 und 24 aus.

Die Halbwertsbreite der Durchlassfunktion (bzw. die Bandbreite des selektiven Filters) ist nach Gleichung (27) gegeben durch

$$\Delta\omega_g = \frac{3 - V_g}{\tau(1)} \approx 20892 \frac{1}{\text{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\nu_g \approx 3325\text{Hz} \quad (31)$$

Die Güte des Filters ist dann nach Gleichung (28) gegeben zu $G_g \approx 0.49$.

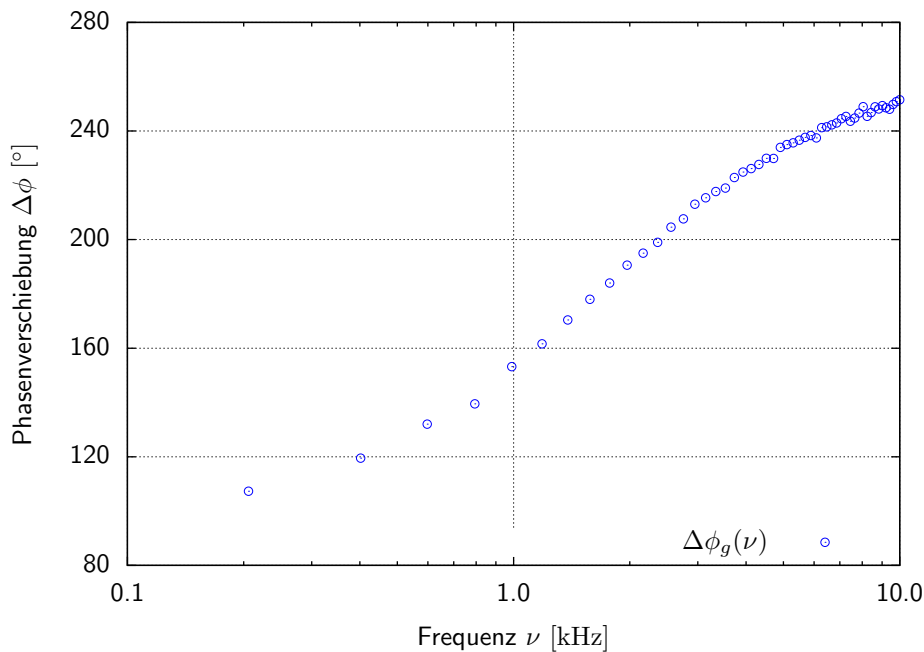


Abbildung 22: Frequenzgang der Phasenverschiebung des selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

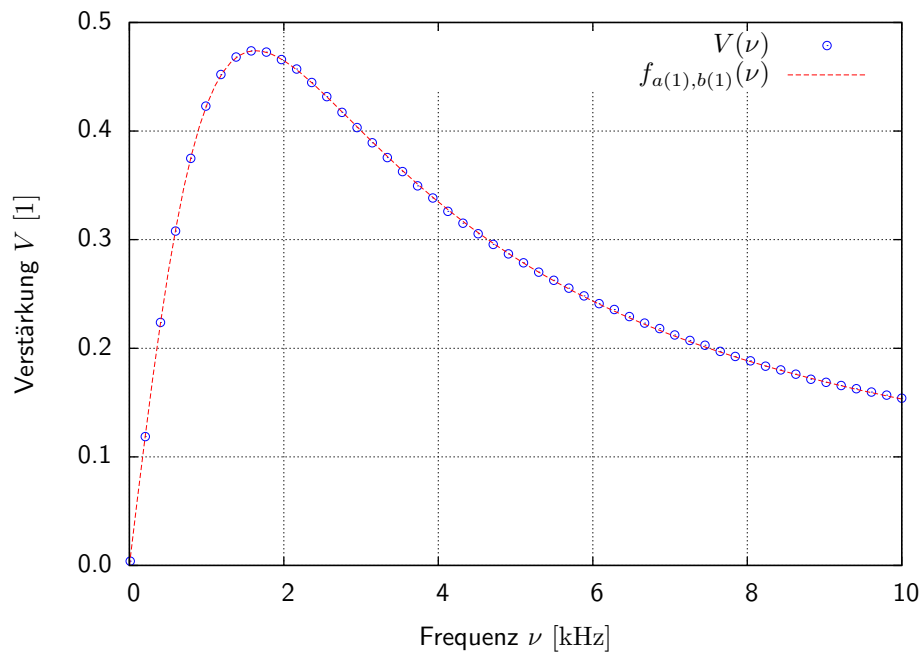


Abbildung 23: Frequenzgang der Verstärkung des selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (lineare ν -Achse).

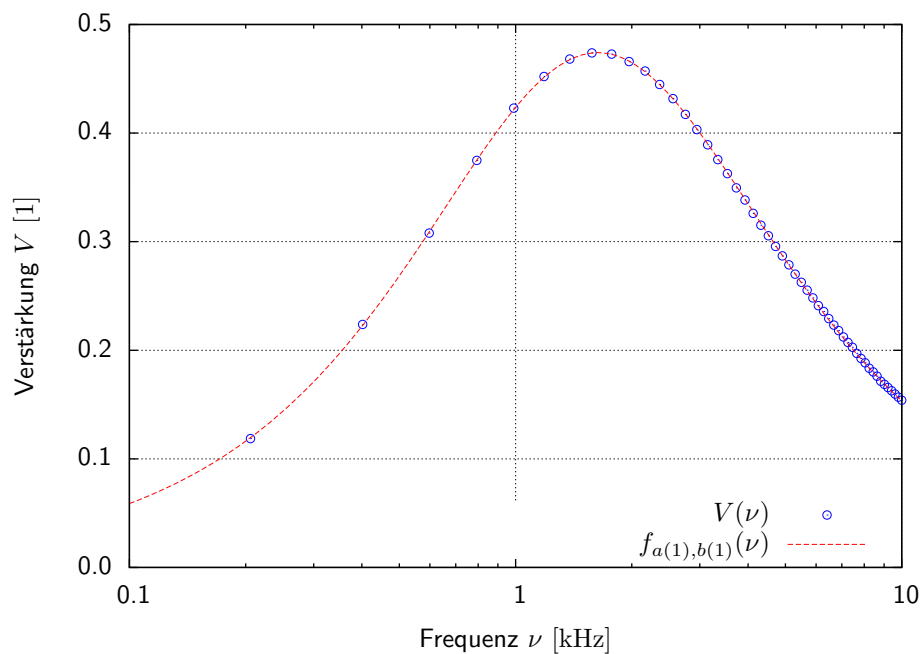


Abbildung 24: Frequenzgang der Verstärkung des selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

4.4. Entdämpfter Bandpass

Die Abbildungen 25, 26 und 27 zeigen wieder die Frequenzgänge von Phase und Amplitude. In diesem Fall wurde die Verstärkung aber gerade so gewählt, dass der Filter die Oszillationsbedingungen knapp verfehlt.

Die Amplitudenbedingung war gerade erfüllt, wenn $R_1 \approx 4.62\text{k}\Omega$ gewählt wurde. Lag die Eingangsfrequenz bei $\nu = \nu_0 = 1.632\text{kHz} \approx \frac{1}{2\pi\tau}$ wurde zusätzlich die Phasenbedingung erfüllt. Folglich war der Filter als Ganzes oszillationsfähig, was durch das Oszillieren der Ausgangsspannung bestätigt werden konnte. Damit wurde die Verstärkung, bei der der Filter im Resonanzfall zu schwingen beginnt, zu $V = 1 + \frac{R_2}{R_1} \approx 3.16$ (mit $R_2 = 10\text{k}\Omega$) bestimmt. Der Theorie zufolge ist die Phasenbedingung für $\nu = \nu_0^* = \frac{1}{2\pi\tau^*} = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \approx 1.592\text{kHz}$ und die Amplitudenbedingung für $V = 3.0$ erfüllt. Demzufolge stimmen unsere Messwerte in guter Näherung mit den theoretisch Vorhergesagten überein.

Wurde $R_1 = 4.64\text{k}\Omega$ gewählt, blieben die Oszillationen auch für Variationen von ν um ν_0 herum aus. Ein solcher Filter, der die Oszillationsbedingungen *gerade nicht* erfüllt, besitzt eine hohe Güte und eignet sich damit zur Analyse von Spektren (siehe nächstes Kapitel). Quantitativ drückt sich dies durch den schnellen Anstieg der Phasenverschiebung um die Resonanzfrequenz herum aus (siehe Abb. 25). Ein solcher fast stufenförmiger Phasenanstieg charakterisiert einen gedämpften, getriebenen Schwingkreis im Bereich der Resonanzfrequenz. (*Bemerkung:* Im Verlauf der Messung wurden in zwei Bereichen starke Störungen der Verstärkung bzw. der Phasenverschiebung aufgenommen. Diese Messpunkte sind in den Plots mit Kreuzen eingetragen und werden für den Fit der Verstärkungsfunktion *nicht* berücksichtigt).

In den Abbildungen 26 und 27 wurden die Frequenzgänge der Verstärkung einmal mit linearer und einmal mit logarithmischer ν -Achse aufgetragen. Da der Frequenzbereich der Resonanz keine Größenordnung überdeckt, führt die halblogarithmische Auftragung zu keiner sichtbaren Formveränderung der Kurve. Qualitativ fällt auf, dass zum einen der Bereich der Resonanz deutlich kleiner als beim gedämpften Filter ausfällt. Der frequenzselektive Bereich ist demnach viel "schärfer". Des Weiteren fällt die maximale Verstärkung viel größer aus als beim gedämpften Filter (vgl. $V_g^{max} \approx 0.5$ wohingegen $V_e^{max} \approx 200$).

Zur quantitativen Analyse setzen wir eine Fitfunktion vom selben Typ $f_{a,b}$ wie beim gedämpften Filter an. Dieser Fit ist in den Abb. 26 und 27 eingezeichnet, wobei nur die mit Kreisen symbolisierten Messpunkte für den Fit herangezogen wurden (die übrigen Messpunkte sind offenbar durch Störungen verfälscht). Es fällt auf, dass der Fit mit den Flanken der Resonanzkurve präzise übereinstimmt, während die real gemessene Spitze der Resonanz deutlich niedriger und "runder" als die vom Fit prognostizierte ist (diese ist durchaus endlich, ist der Übersicht halber aber im Plot nicht dargestellt). Hierfür sind vermutlich die dem realen OpAmp auferlegten Beschränkungen verantwortlich (maximale Verstärkung endlich etc.). `gnuplot` liefert die Fitparameter $a(2) = 9.73173 \cdot 10^{-5}$ und $b(2) = 2.99355$. Daraus ergeben sich sofort $\tau(2) \approx 0.97 \cdot 10^{-4}$ und $V_e \approx 2.99$. Die Resonanzfrequenz ist demnach $\nu_0(2) = \frac{1}{2\pi \cdot \tau(2)} \approx 1.635\text{kHz}$. Es zeigt sich, dass $\nu_0(1) \approx \nu_0(2)$ was den Erwartungen entspricht, da die Resonanzfrequenz durch Variation der Verstärkung V nicht beeinflusst wird. Die Verstärkung $V_e \approx 2.99$ ist nur wenig kleiner als 3.0 was auf die Nähe zur Amplitudenbedingung (der Filter oszilliert ja *gerade nicht*) hindeutet. Die Bandbreite des Filters ergibt sich nach Gleichung (27) zu

$$\Delta\omega_e = \frac{3 - V_e}{\tau(2)} \approx 66.3 \frac{1}{\text{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\nu_e \approx 10.5\text{Hz} \quad (32)$$

Damit besitzt der nun vorliegende Filter eine deutlich größere Güte $G_e \approx 155.71$ (nach Gleichung (28)) als der gedämpfte aus dem ersten Teil des Versuches.

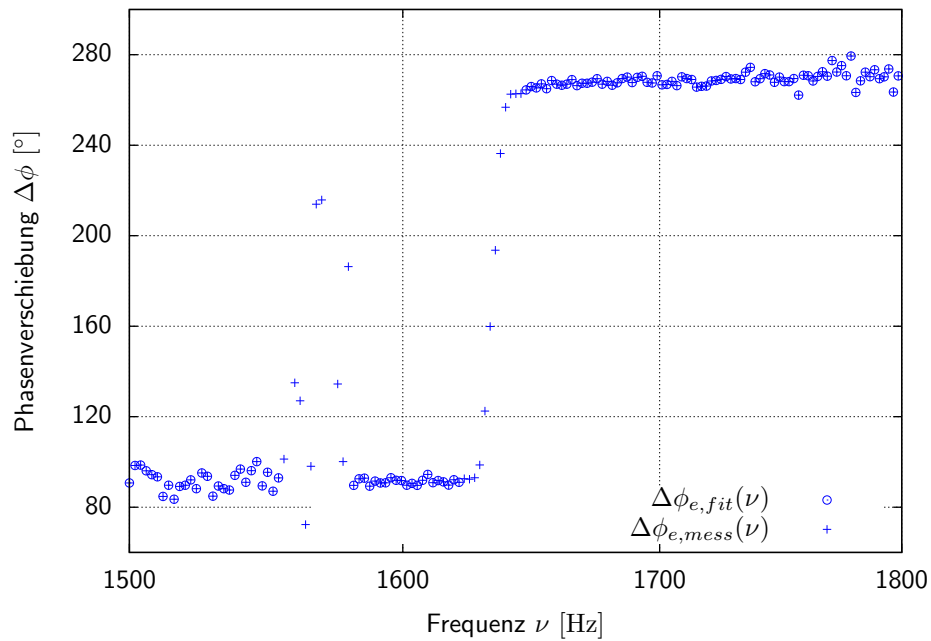


Abbildung 25: Frequenzgang der Phasenverschiebung des entdämpften selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

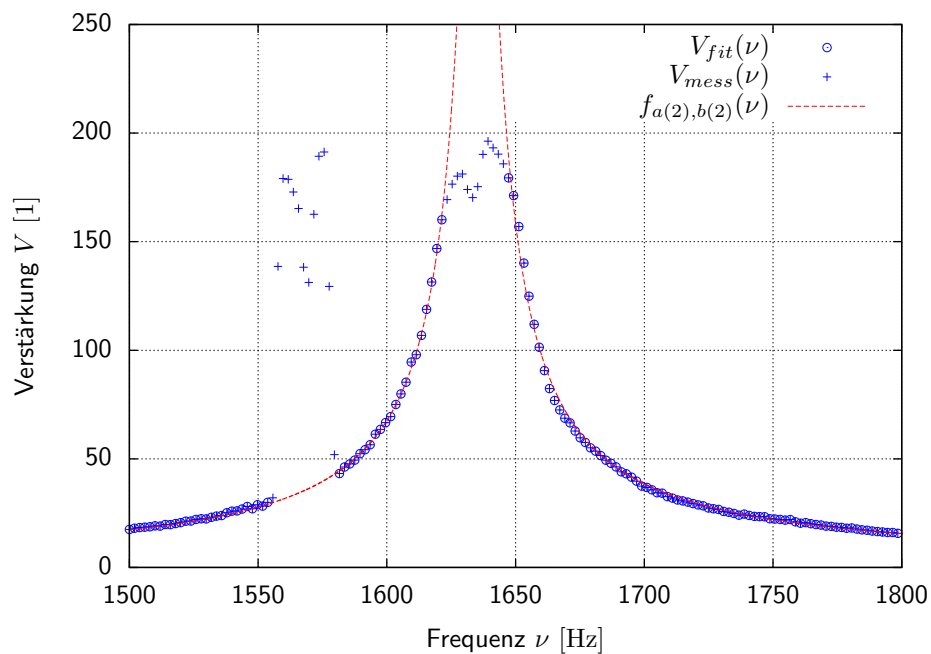


Abbildung 26: Frequenzgang der Verstärkung des entdämpften selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (lineare ν -Achse).

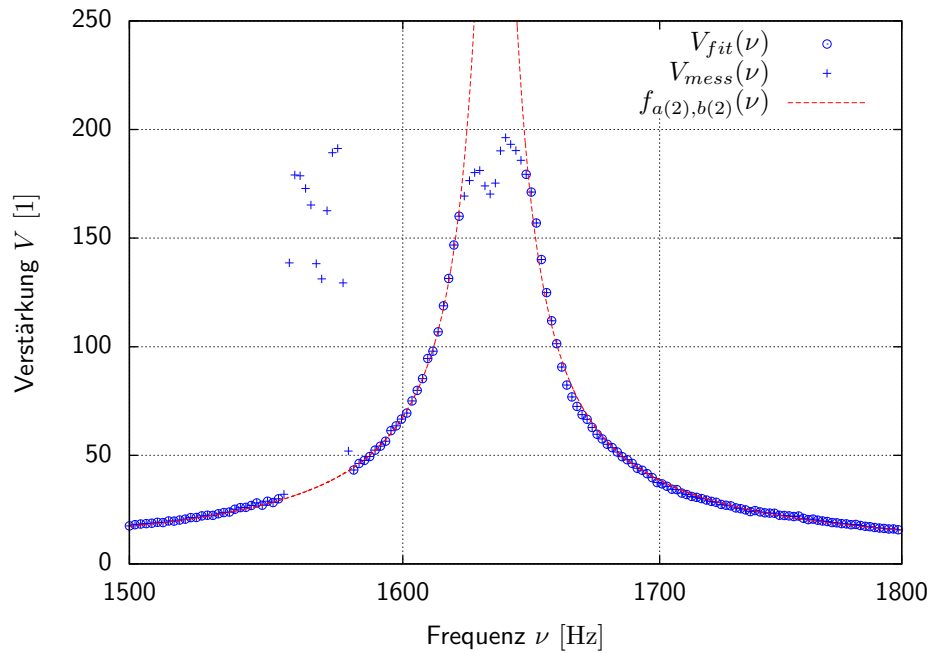


Abbildung 27: Frequenzgang der Verstärkung des entdämpften selektiven Frequenzfilters zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

In Abbildung 28 und 29 werden die Frequenzgänge von Phase und Verstärkung des gedämpften (g) und entdämpften (e) Filters miteinander verglichen. Abbildung 28 veranschaulicht grafisch, was sich hinter der Aussage $G_e \gg G_g$ verbirgt. Der Resonanzpeak des entdämpften Filters ist viel schmaler und höher als der des gedämpften Pedants (man beachte die unterschiedlichen V -Skalen!). Damit ist das Auflösungsvermögen des Filters je größer, desto näher V an 3 liegt. Die Phasenplots in Abbildung 29 zeigen, dass die absolute Veränderung der Phasenverschiebung für beide Filter bei $\sim 180^\circ$ liegt. Allerdings findet der Anstieg der Phasenverschiebung beim Frequenzfilter hoher Güte viel schneller statt als beim Ungedämpften (so schnell, dass die eigentlich stetige Veränderung der Phasenverschiebung in der Skala des gedämpften Filters als “Sprung” erscheint).

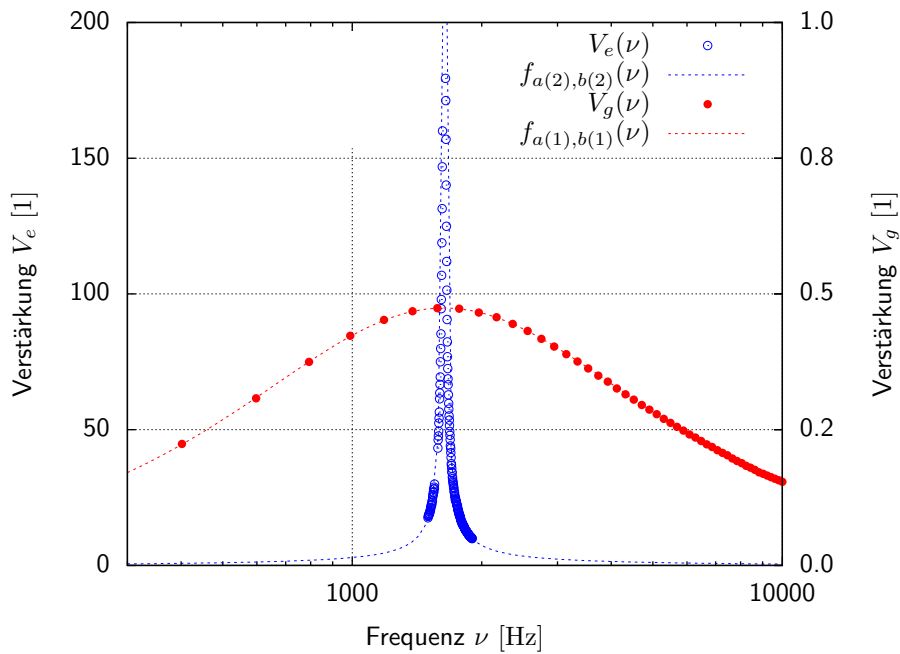


Abbildung 28: Frequenzgang der Verstärkung der (ent)dämpften selektiven Frequenzfilter zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

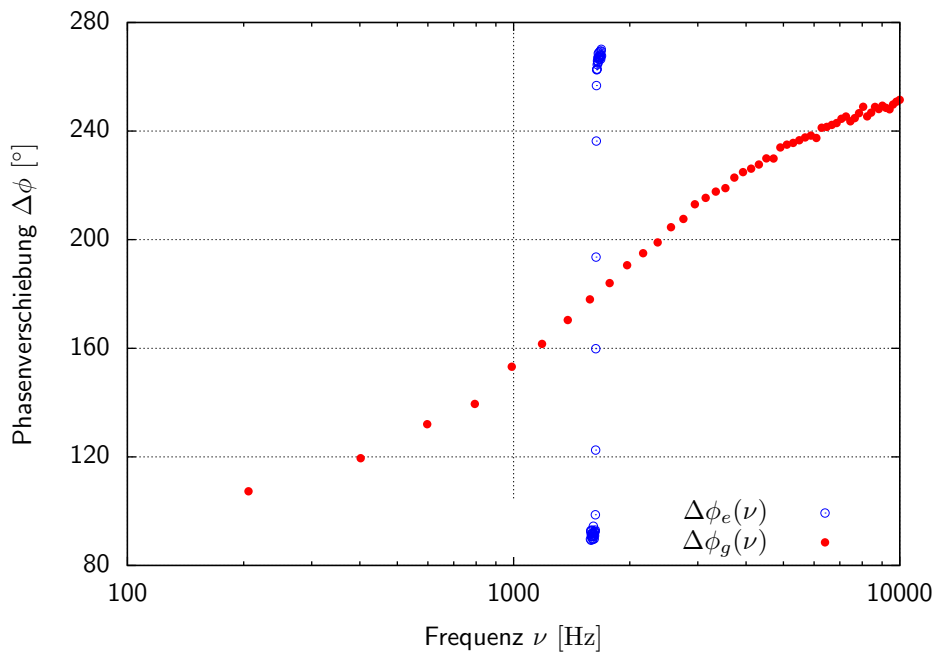


Abbildung 29: Frequenzgang der Phasenverschiebung der (ent)dämpften selektiven Frequenzfilter zwischen Eingangssignal U_e und Ausgangssignal U_a (logarithmische ν -Achse).

4.5. Signalanalyse mit dem Bandpass

Benutzt man den oben eingestellten Frequenzfilter als Fourieranalysator, muss man den untersuchten Singaltyp bei unterschiedlichen Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz an den Eingang anlegen. Bei der Resonanzfrequenz erhält man damit die Amplitude der Grundfrequenz. Alle höheren Harmonischen können durch Erniedrigen der Grundfrequenz am Signalgenerator so verschoben werden, dass ihre Frequenz der Resonanzfrequenz entspricht. Die dann gemessenen Amplituden entsprechen den höheren Fourierkoeffizienten.

In Tabelle 1 sind die gemessenen Daten für die ersten drei Fourierkoeffizienten eines angelegten Sinussignals aufgelistet. Da ein Sinussignal zur Funktionenbasis gehört, in die für die Fourierreihe entwickelt wird, lassen sich keine weiteren Fourierkomponenten als die Erste bestimmen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Fourierentwicklung durch

$$f(t) = c_1 \cdot \sin \omega_1 t = \sin \omega_1 t \quad (33)$$

gegeben ist.

Komponente	Sinussignal					
	$U_{pp}(i)$	$\frac{U_{pp}(i)}{U_{pp}(1)}$	$\frac{c_i}{c_1}$	$\nu(i)$	$\frac{\nu(1)}{\nu(i)}$	$\frac{\omega_i}{\omega_1}$
	[V]	[1]	[1]	[Hz]	[1]	[1]
1	-	1	1.0	1632.0	1.0	1
2	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-

Tabelle 1: Messungen der ersten drei Fourierkomponenten eines Sinussignals.

Tabelle 2 zeigt die Werte der ersten drei Fourierkomponenten eines Rechtecksignals. Dessen Fourierreihe ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} [c_1 \cdot \sin \omega_1 t + c_2 \cdot \sin 3\omega_1 t + c_3 \cdot \sin 5\omega_1 t + \dots] \quad (34)$$

$$= \frac{4h}{\pi} \left[\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right] \quad (35)$$

Die theoretischen Verhältnisse der Amplituden und Frequenzen der Fourierkomponenten sind in den Tabellen als $\frac{c_i}{c_1}$ bzw. $\frac{\omega_i}{\omega_1}$ zum Vergleich mit angegeben. Die gemessenen Frequenzen stimmen offensichtlich sehr gut mit den theoretischen Werten überein während die Amplituden zu langsam abfallen. Die Abweichungen sind so groß, dass es sich sicher nicht um reine Messfehler sondern systematische Abweichungen handelt. Der Grund für diese Abweichungen ließ sich im Nachhinein nicht rekonstruieren.

Komponente	Rechtecksignal					
	$U_{pp}(i)$	$\frac{U_{pp}(i)}{U_{pp}(1)}$	$\frac{c_i}{c_1}$	$\nu(i)$	$\frac{\nu(1)}{\nu(i)}$	$\frac{\omega_i}{\omega_1}$
	[V]	[1]	[1]	[Hz]	[1]	[1]
1	14.6	1.00	1.00	1632.0	1.00	1
2	13.0	0.89	0.33	544.8	3.00	3
3	11.0	0.75	0.20	327.3	4.99	5

Tabelle 2: Messungen der ersten drei Fourierkomponenten eines Rechtecksignals.

In Tabelle 3 sind die gemessenen Amplituden und Frequenzen der ersten drei Fourierkomponen-

ten eines Dreiecksignals dargestellt. Die Fourierreihe ist gegeben durch

$$f(t) = -\frac{8h}{\pi^2} [c_1 \cdot \cos \omega_1 t + c_2 \cdot \cos 3\omega_1 t + c_3 \cdot \cos 5\omega_1 t + \dots] \quad (36)$$

$$= -\frac{8h}{\pi^2} \left[\cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots \right] \quad (37)$$

Der Vergleich mit den theoretischen Amplituden- und Frequenzverhältnissen liefert ein ähnliches Bild wie beim Rechtecksignal. Die Frequenzverhältnisse stimmen präzise mit den theoretischen Werten überein, während die Amplitudenverhältnisse deutlich über den erwarteten Werten liegen. Dies bestätigt die Vermutung, dass ein systematischer Effekt für diese Abweichungen verantwortlich ist. Es fällt auf, dass die gemessenen Fourierkoeffizienten beim Dreiecksignal schneller abfallen als beim Rechtecksignal. Dieses Verhalten entspricht qualitativ der Theorie.

Komponente	Dreiecksignal					
	$U_{pp}(i)$	$\frac{U_{pp}(i)}{U_{pp}(1)}$	$\frac{c_i}{c_0}$	$\nu(i)$	$\frac{\nu(1)}{\nu(i)}$	$\frac{\omega_i}{\omega_1}$
	[V]	[1]	[1]	[Hz]	[1]	[1]
1	13.8	1.00	1.00	1635.3	1.00	1
2	8.6	0.63	0.11	545.6	3.00	3
3	4.6	0.33	0.04	327.4	4.99	5

Tabelle 3: Messungen der ersten drei Fourierkomponenten eines Dreiecksignals.

5. Fehlerrechnung

Im Folgenden sollen die Abweichungen der gemessenen Kenngrößen des selektiven Filters von den theoretischen Werten berechnet werden.

Gedämpfter Bandpass Für die Resonanzfrequenz wurde $\nu_0(1) \approx 1.634\text{kHz}$ gemessen. Theoretisch ergibt sich ein Wert von $\nu_0^* = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \approx 1.592\text{kHz}$. Damit folgt eine relative Abweichung

$$\delta[\nu_0(1)] = \frac{\nu_0(1) - \nu_0^*}{\nu_0^*} \approx 2.6\% \quad (38)$$

Die Verstärkung wurde zu $V_g \approx 0.96$ gemessen. Die Theorie fordert den Wert $V_g^* = 1.0$. Die relative Abweichung ist damit

$$\delta[V_g] = \frac{V_g - V_g^*}{V_g^*} \approx -3.5\% \quad (39)$$

Die Bandbreite des Filters ergab sich zu $\Delta\omega_g \approx 20892\frac{1}{\text{s}}$. Die theoretische Rechnung ergibt $\Delta\omega_g^* = \frac{3-V_g^*}{RC} = 20000\frac{1}{\text{s}}$. Damit folgt für die relative Abweichung

$$\delta[\Delta\omega_g] = \frac{\Delta\omega_g - \Delta\omega_g^*}{\Delta\omega_g^*} \approx 4.5\% \quad (40)$$

Die Güte wurde zu $G_g \approx 0.49$ gemessen wobei die Theorie einen Wert von $G_g^* = 0.5$ vorhersagt. Die relative Abweichung ist

$$\delta[G_g] = \frac{G_g - G_g^*}{G_g^*} \approx -2.0\% \quad (41)$$

Entdämpfter Bandpass Für die Resonanzfrequenz wurde $\nu_0(2) \approx 1.635\text{kHz}$ gemessen. Theoretisch ergibt sich ein Wert von $\nu_0^* = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \approx 1.592\text{kHz}$. Damit folgt eine relative Abweichung

$$\delta[\nu_0(2)] = \frac{\nu_0(2) - \nu_0^*}{\nu_0^*} \approx 2.7\% \quad (42)$$

Die Verstärkung wurde zu $V_e \approx 2.99$ gemessen. Die Theorie fordert den Wert $V_e^* = 1 + \frac{R_2}{R_1} \approx 3.16$ (mit $R_1 = 4.64\text{k}\Omega$). Die relative Abweichung ist damit

$$\delta[V_e] = \frac{V_e - V_e^*}{V_e^*} \approx -5.2\% \quad (43)$$

Hierbei gilt es zu bemerken, dass die Widerstände mit gewissen Toleranzen versehen sind. Da der Filter bei obigen Daten *nicht mehr* oszilliert hat, ist eine Verstärkung von $V_e < 3.0$ nötig. Demnach sollte dem theoretisch berechneten Wert V_e^* nicht allzu große Bedeutung beigemessen werden. Die Bandbreite des Filters ergab sich zu $\Delta\omega_e \approx 66.3\frac{1}{\text{s}}$. Die theoretische Rechnung ergibt $\Delta\omega_e^* = \frac{3-V_e^*}{RC} \approx -1600\frac{1}{\text{s}}$. Wegen $V_e^* > 3.0$ wird $\omega_e^* < 0$. Da dies physikalisch nicht sinnvoll ist, berechnen wir die relativen Abweichungen der gemessenen Bandbreite sowie der Güte nicht. In diesem Fall sind die Toleranzen der Widerstände so groß, dass die theoretischen Werte mit unverhältnismäßig großen Toleranzen behaftet sind.

Signalanalyse mit dem Bandpass Wie schon erwähnt unterlagen die Amplitudenmessungen der Fourierkomponenten einem nicht näher spezifizierbaren systematischen Fehler. Wir führen daher keinen Vergleich mit den theoretischen Werten durch, da diesem wenig Aussagekraft zukommen würde.

6. Zusammenfassung

Umkehr-Differentiator Die differenzierende Eigenschaft des Umkehr-Differentiators konnte innerhalb gewisser Frequenzbereiche bestätigt werden. Prinzipbedingt gibt die hier verwendete Schaltung die negative Ableitung des Eingangssignals aus, solange diese einen gewissen Betrag nicht übersteigt. Sobald die maximale Steigung des Eingangssignals Ausgangsspannungen $U_a > U_{\pm}$ erfordert, stößt der OpAmp an die von der Betriebsspannung auferlegte Grenze und verliert so seine differenzierende Eigenschaft. Bei Rechtecksignalen werden die formalen Delta-Distributionen durch Delta-Peaks approximiert, welche bei jeder Frequenz durch die Betriebsspannung limitiert werden. Auf Grund der endlichen Reaktionszeit der Schaltung (i.e. des OpAmps) nimmt die relative Breite der Delta-Peaks zum Rechtecksignal stetig zu und approximiert die eigentliche Ableitung zunehmend schlechter.

Ein hoher Innenwiderstand der Signalquelle führte zu Deformationen des Ausgangssignals und schränkte den Frequenzbereich, in welchem die differenzierende Eigenschaft der Schaltung erhalten blieb, stark ein.

Umkehr-Integrator Die integrierende Eigenschaft des Umkehr-Integrators wurde in weiten Frequenzbereichen verifiziert. Bei allen drei Signaltypen wurde der Frequenzbereich, in dem das Ausgangssignal das Integral des Eingangssignals approximiert, nach unten durch die Betriebsspannung des OpAmps beschränkt. Wurden die Frequenzen unter vom Signaltyp abhängige Werte reduziert, wuchs die in einer Periode zu integrierende Fläche stark an. Als Folge wurde das Ausgangssignal durch die Betriebsspannung limitiert und verlor daraufhin seinen Eigenschaft, das Integral der Eingangsfunktion zu repräsentieren.

Wurde der Parallelwiderstand zum Kondensator entfernt, ließ sich selbst bei geerdetem Eingang ein stetiger Anstieg der Ausgangsspannung feststellen. Grund hierfür sind die Offsetströme des realen OpAmps, die den zum Laden des Kondensators nötigen Strom bereitstellen und auf diese Weise "Integrationsfläche" ansammeln. Der Parallelwiderstand wirkt diesem Laden des Kondensators entgegen, indem er die geringen Ströme ableitet. Auf diese Weise lässt sich die Ausgangsspannung auch für lange Zeiten stabil auf GND halten.

Gedämpfter Bandpass Die charakteristischen Größen des gedämpften selektiven Filters wurden anhand einer Frequenzganganalyse von Phasenverschiebung und Verstärkung errechnet. Für die Resonanzfrequenz wurde

$$\nu_0(1) \approx 1.634\text{kHz} \quad \text{mit} \quad \delta[\nu_0(1)] \approx 2.6\% \quad (44)$$

gemessen. Für die Verstärkung ergab sich

$$V_g \approx 0.96 \quad \text{mit} \quad \delta[V_g] \approx -3.5\% \quad (45)$$

Die Bandbreite des Filters ergab sich zu

$$\Delta\omega_g \approx 20892 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{mit} \quad \delta[\Delta\omega_g] \approx 4.5\% \quad (46)$$

Der Filter besaß eine Güte von

$$G_g \approx 0.49 \quad \text{mit} \quad \delta[G_g] \approx -2.0\% \quad (47)$$

Demnach besaß dieser Frequenzfilter eine geringe Frequenzselektivität und eignet sich nicht zur Fourieranalyse von periodischen Signalen.

Entdämpfter Bandpass Die Entdämpfung des Bandpasses wurde durch Integration der Rückkopplungsbeschaltung eines Elektrometerverstärkers realisiert. Mit $R_1 \approx 4.62\text{k}\Omega$ und $\nu \approx 1.632\text{kHz}$ ließen sich Amplituden- und Phasenbedingung erfüllen. In Folge dessen began der Filter zu schwingen. Wurde R_1 auf $R_1 \approx 4.64\text{k}\Omega$ erhöht (und damit die Verstärkung verringert) wurden

die Oszillationsbedingung gerade noch verletzt. Folge war ein selektiver Filter mit hoher Güte. Durch die Frequenzganganalyse wurden wieder die charakteristischen Größen bestimmt. Für die Resonanzfrequenz wurde

$$\nu_0(2) \approx 1.635\text{kHz} \quad \text{mit} \quad \delta[\nu_0(2)] \approx 2.7\% \quad (48)$$

gemessen. Die Verstärkung wurde zu

$$V_e \approx 2.99 \quad \text{mit} \quad \delta[V_e] \approx -5.2\% \quad (49)$$

bestimmt. Die Bandbreite ergab sich schließlich zu $\Delta\omega_e \approx 66.31\text{s}$. Die Güte erreichte einen Wert von $G_e \approx 155.71$. Der grafische Vergleich von gedämpftem und entdämpftem Filter zeigte einen deutlich schnelleren Anstieg der Phasenverschiebung um $\sim 180^\circ$ beim entdämpften Filter im Bereich der Resonanzfrequenz. Der Resonanzpeak der Verstärkung erwies sich beim entdämpften Filter hoher Güte als deutlich höher und schmaler und qualifizierte diesen als hinreichend frequenzselektiv um Fourierspektren aufnehmen zu können.

Signalanalyse mit dem Bandpass Die Anwendung des entdämpften Bandpasses als Fourieranalysator hoher Frequenzauflösung erlaubte die Bestimmung der ersten drei Fourierkoeffizienten von Dreieck- und Rechtecksignal. Die Fourieranalyse des Sinussignals ergab wie erwartet nur ein Maximum der Amplitude an der Resonanzfrequenz. Die Frequenzen der höheren Fourierkomponenten ließen sich bei den anderen beiden Signaltypen präzise bestimmen und stimmten mit den theoretisch erwarteten Frequenzen, welche mathematischen Betrachtungen entsprangen, überein. Bei der Messung der Amplituden konnte ein qualitativ den Erwartungen entsprechendes Verhalten beobachtet werden. Quantitativ wichen die Messwerte gravierend aber systematisch von den erwarteten Werten ab. Demnach wurde bei der Messung mit großer Wahrscheinlichkeit ein systematischer Fehler begangen.

A. Messwerte

.

.