

Elektronikpraktikum im WS 2010/11

UNIVERSITÄT STUTTGART

Protokoll zum Versuch

## V03: Passive Netzwerke

Stephan Ludwig, Nicolai Lang

14. November 2010

### Zusammenfassung

Dieser Versuch behandelt das Verhalten verschiedener Instrumente bei der Messung von Wechselströmen. Desweiteren werden Übertragungscharakteristik und Grenzfrequenz eines Tiefpassfilters gemessen. Weiterhin wird das Integrier- und Differenzierverhalten von Hoch- und Tiefpass untersucht. Abschließend wird der Oszilloskop-Tastkopf kalibriert.

<b>Verfasser</b> .....	Lang, Nicolai (2439501, B.Sc. Physik)
<b>Mitarbeiter</b> .....	Ludwig, Stephan (2526605, B.Sc. Physik)
<b>Gruppennummer</b> .....	1-16
<b>Versuchstag</b> .....	8. November 2009
<b>Betreuer</b> .....	

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1. Komplexe Wechselspannungsgrößen . . . . .	3
1.1.1. Widerstände . . . . .	3
1.1.2. Zeigerdiagramme . . . . .	4
1.1.3. Leitwerte . . . . .	5
1.1.4. Leistung . . . . .	5
1.2. Frequenzfilter . . . . .	6
1.2.1. Hochpass . . . . .	6
1.2.2. Tiefpass . . . . .	6
1.3. Pegelmaße . . . . .	7
<b>2. Messprinzip, Schaltpläne und Versuchsablauf</b>	<b>8</b>
2.1. Messung von Wechselspannungen . . . . .	8
2.2. Tiefpass manuell . . . . .	8
2.3. Tiefpass mit LabVIEW . . . . .	8
2.4. Integrier- und Differenzierverhalten . . . . .	9
2.5. Oszilloskop-Tastkopf . . . . .	9
<b>3. Berechnungen &amp; Formeln</b>	<b>10</b>
3.1. Tiefpass . . . . .	10
<b>4. Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1. Messung von Wechselspannungen . . . . .	11
4.2. Tiefpass . . . . .	11
4.2.1. Manuelle Datenaufnahme . . . . .	11
4.2.2. LabVIEW-Umsetzung . . . . .	15
4.3. Integrier- und Differenzierverhalten . . . . .	17
4.3.1. Tiefpass . . . . .	17
4.3.2. Hochpass . . . . .	20
4.4. Oszilloskop-Tastkopf . . . . .	22
<b>5. Fehlerrechnung</b>	<b>23</b>
5.0.1. Tiefpass manuell . . . . .	23
5.0.2. Tiefpass LabVIEW . . . . .	23
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>24</b>
<b>A. Messwerte</b>	<b>25</b>

# 1. Grundlagen

## 1.1. Komplexe Wechselspannungsgrößen

### 1.1.1. Widerstände

In Wechselstromkreisen spielt nicht nur der Ohmsche Widerstand eine entscheidende Rolle. Induktivitäten (realisiert durch Spulen) und Kapazitäten (realisiert durch Kondensatoren) führen nicht nur zu anderen Amplituden sondern auch zu veränderten Phasenlagen von Momentanstrom  $i(t)$  und -spannung  $u(t)$  zueinander. Wir definieren die drei Widerstände als Proportionalitätsfaktoren der linearen Beziehungen zwischen Strom und Spannung (Ohmscher Widerstand), Stromänderung und Spannung (Induktivität) sowie Spannungsänderung und Strom (Kapazität):

$$i(t) \cdot R = u(t) \quad \text{Ohmscher Widerstand} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} i(t) \cdot L = u(t) \quad \text{Induktivität} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) \cdot C = i(t) \quad \text{Kapazität} \quad (3)$$

Im Falle harmonischer Funktionen  $u$  und  $i$  lässt sich die Information der Amplitude und der Phasenlage in einer komplexen Zahl codieren. Die Zeitabhängigkeit erzwingt komplexwertige Funktionen  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  welche im Folgenden als komplexe Momentanspannung bzw. komplexer Momentanstrom bezeichnet werden. Komplexe Größen werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet:

$$u(\omega t) = \operatorname{Re} \underline{u}(\omega t) = \operatorname{Re} \hat{u} e^{j(\omega t + \phi_u)} = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) \quad (4)$$

$$i(\omega t) = \operatorname{Re} \underline{i}(\omega t) = \operatorname{Re} \hat{i} e^{j(\omega t + \phi_i)} = \hat{i} \cos(\omega t + \phi_i) \quad (5)$$

Hier ist  $j$  die imaginäre Einheit um einer Verwechslung mit dem Momentanstrom  $i$  vorzubeugen.

Wir definieren noch die komplexen Effektivwerte von Spannung und Strom, welche die Information des reellen Effektivwertes (übliche Definition) und die Phasenlage codieren:

$$\underline{U} := \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\phi_u} = U \cdot e^{j\phi_u} \quad (6)$$

$$\underline{I} := \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\phi_i} = I \cdot e^{j\phi_i} \quad (7)$$

Die linearen Elemente  $R$ ,  $L$  und  $C$  manipulieren die Korrelation zwischen Amplituden und Phasen von Strom und Spannung. Daher definiert man den komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  (*Impedanz*) und seinen Betrag  $Z := |\underline{Z}|$  (*Scheinwiderstand*) um die Wirkung einer Kombination obiger Elemente auf Strom und Spannung formal zu repräsentieren:

$$\underline{Z} := \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j(\phi_u - \phi_i)} \quad (8)$$

Setzen wir nun die Definition der komplexen Größen  $u$  und  $i$  in die Definition von  $R$ ,  $L$  und  $C$  ein, ergibt sich nach kurzer Rechnung die folgende Darstellung der Impedanzen:

$$\underline{Z}_R = R = R \cdot e^{j0} \quad (9)$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (10)$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (11)$$

Führen wir den Begriff des *Blindwiderstandes*  $X_\alpha := \operatorname{Im} \underline{Z}_\alpha$  und des *Wirkwiderstandes*  $R_\alpha := \operatorname{Re} \underline{Z}_\alpha$  ein, lässt sich schreiben:

$$(R_R, X_R) = (R, 0) \quad (12)$$

$$(R_L, X_L) = (0, \omega L) \quad (13)$$

$$(R_C, X_C) = \left(0, -\frac{1}{\omega C}\right) \quad (14)$$

Damit gilt:

$$\underline{Z}_\alpha = R_\alpha + jX_\alpha \tag{15}$$

Der Zusammenhang mit dem *Scheinwiderstand* ist offensichtlich:

$$Z_\alpha = |\underline{Z}_\alpha| = \|(R_\alpha, X_\alpha)\|_2 = \sqrt{R_\alpha^2 + X_\alpha^2} \tag{16}$$

Nun erkennt man leicht, dass ein ohmscher Widerstand wegen  $X_R = 0$  nicht in der Lage ist eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung zu erzwingen. Dies deckt sich mit der Erfahrung, dass Strom und Spannung an einem ohmschen Widerstand in Phase sind. Wie man an  $Z_L$  erkennt, erzeugt eine Induktivität eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$  zwischen Strom und Spannung (i.e. der Strom hinkt der Spannung hinterher), während wir aus  $Z_C$  ablesen, dass eine Kapazität eine Phasenverschiebung von  $-\frac{\pi}{2}$  hervorbringt (i.e. die Spannung hinkt dem Strom hinterher).

### 1.1.2. Zeigerdiagramme

Obiger Formalismus liefert auch einen einfachen Ausdruck für die Reihenschaltung beliebiger Elemente:

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R_R + j(X_L + X_C) = R_R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{17}$$

Eine solche RLC-Kette wird oft zum Anlass genommen die Darstellung der komplexen Widerstände als "Zeiger" in der Komplexen Ebene einzuführen. Im Sinne der  $\mathbb{C}$ -Ebene wird ein ohmscher Widerstand zu einem waagerechten Zeiger nach rechts, dessen Länge ein Maß für den Wirkwiderstand  $R$  ist. Analog stellen wir die rein imagiären Impedanzen für  $L$  und  $C$  als vertikale Zeiger dar, welche für Induktivitäten nach oben, für Kapazitäten nach unten weisen. Die Winkel zwischen den Zeigern entsprechen gerade den oben erwähnten Phasenverschiebungen. Die Impedanz einer RLC-Kette, welche sich formal nach (17) ergibt, lässt sich im Zeigerdiagramm als Vektoraddition in der  $\mathbb{C}$ -Ebene auffassen. Hier kommt die bekannte Isomorphie  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  zum tragen:

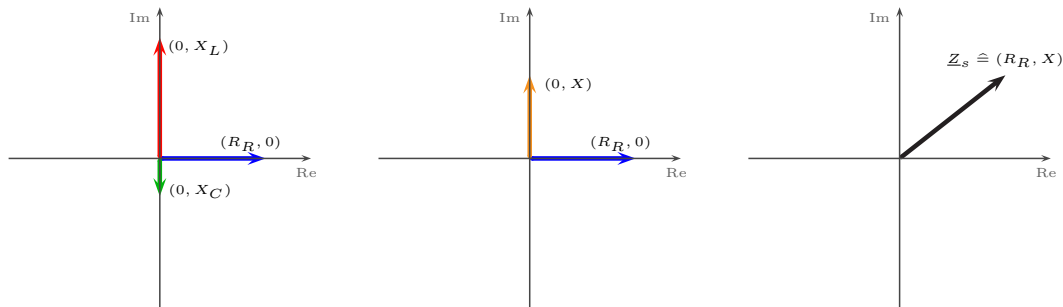


Abbildung 1: Von links nach rechts werden die Additionen in (17) mit Zeigern im  $\mathbb{R}^2$  durchgeführt.

Gehen wir nun von einem passiven Netzwerk aus, welches die Impedanz  $\underline{Z} = R + jX = Z \cdot e^{j\phi_Z}$  aufweist. Geben wir den Strom vor und sei dieser zur Zeit  $t = t_0$  maximal (i.e.  $i(t_0) = \underline{i}(t_0)$ ) so ergeben sich die Darstellungen in Abbildung 2.

Die Impedanz dreht die Phase der Spannung um  $\phi_Z$  und skaliert die Länge des Pfeiles mit  $Z$ . Um die Zeitevolution zu erhalten stelle man sich vor, der Zeiger der Impedanz sei fixiert, während die fest aneinander gekoppelten Zeiger von Spannung und Strom im Gegenuhrzeigersinn mit  $\omega$  rotieren. Die Projektion der Zeiger von  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  (sprich: der Realteil) entsprechen nun den real messbaren Strömen und Spannungen. Offenbar handelt es sich um harmonische Schwingungen mit Phasenverschiebung  $\phi_Z$ .

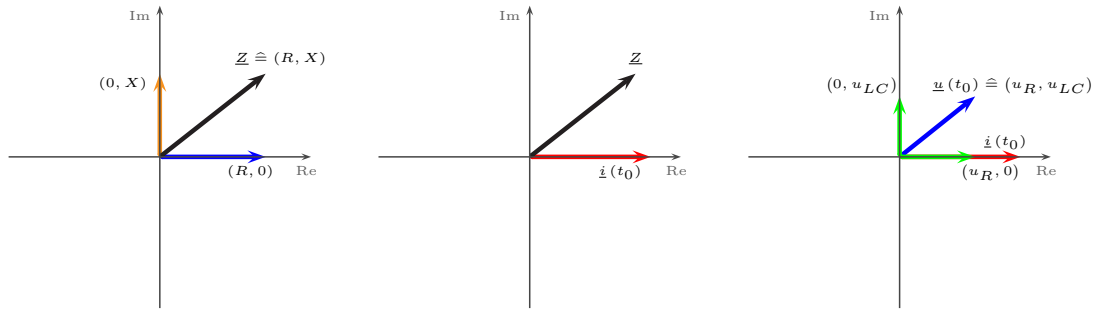


Abbildung 2: *Links*: Addition des LC-Widerstandes zum ohmschen Widerstand; *Mitte*:  $\underline{Z}$  bestimmt mit  $\underline{i}$  die Lage der Spannung; *Rechts*: Die Spannung lässt sich auf die Achsen projizieren (Spannungsabfall  $u_R$  am ohmschen Widerstand,  $u_{LC}$  an Induktivitäten bzw. Kapazitäten).

**1.1.3. Leitwerte**

Bei Parallelschaltungen von  $R$ ,  $L$  und  $C$  addieren sich die reziproken Impedanzen. Daher wird analog zur Gleichstromrechnung der komplexe Leitwert  $\underline{Y}$  definiert (*Admittanz*):

$$\underline{Y} := \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U} \cdot e^{-j(\phi_u - \phi_i)} \tag{18}$$

Auch dieser zerfällt natürlich wieder in Real- ( $G$ , *Konduktanz*) und Imaginärteil ( $B$ , *Suszeptanz*):

$$\underline{Y} = G + jB \tag{19}$$

**1.1.4. Leistung**

Die Momentanleistung ergibt sich aus reellem Momentanstrom und Momentanspannung zu

$$p(\omega t) = u(\omega t) \cdot i(\omega t) = \text{Re } \underline{u}(\omega t) \cdot \text{Re } \underline{i}(\omega t) \tag{20}$$

Elementare Rechnungen führen auf

$$p(\omega t) = \text{Re} [\underline{U}\underline{I}^* + \underline{U}\underline{I}e^{2j\omega t}] \tag{21}$$

Im Zeitmittel trägt nur der zeitkonstante erste Summand zur mittleren Leistung bei (da  $\langle e^{2j\omega t} \rangle = 0$ ). Es ist daher sinnvoll die komplexe Leistung (*komplexe Scheinleistung*) als

$$\underline{S} := \underline{U}\underline{I}^* = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\phi_u - \phi_i)} = P + jQ \tag{22}$$

zu definieren. Der Betrag  $S := |\underline{S}| = UI$  heißt *Scheinleistung*.  $P := \text{Re } \underline{S} = UI \cos(\phi_u - \phi_i)$  wird als *Wirkleistung* bezeichnet, während  $Q := \text{Im } \underline{S} = UI \sin(\phi_u - \phi_i)$  die sog. *Blindleistung* darstellt. Die Wirkleistung gibt die tatsächlich an Verbraucher übergebene Leistung an, da sie ein Maß für diejenige Leistung ist, welche durch in Phase anliegende Spannungen und Ströme übertragen wird. Die Blindleistung hingegen ist Folge der um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschobene Strom-Spannungskurven und zeigt daher die Leistungsflektuationen im Netzwerk an, welche durch den Feldaufbau in Induktivitäten und Kapazitäten hervorgerufen werden. Diese Leistung oszilliert im Netzwerk und wird nicht "verbraucht".

## 1.2. Frequenzfilter

### 1.2.1. Hochpass

Ein einfacher Hochpass ist aufgebaut wie in Abbildung 3 dargestellt. Der Kondensator blockiert hierbei niedrige Frequenzen während er hohe passieren lässt. Die Ausgangsspannung wird dabei am ohmschen Widerstand abgegriffen.

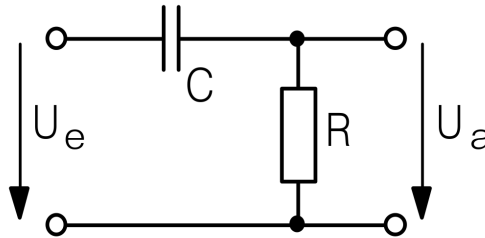


Abbildung 3: RC-Hochpass erster Ordnung.

Wendet man die Formel für den Spannungsteiler

$$\frac{U_2}{U} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (23)$$

auf obige Schaltung an, erhält man

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} \quad (24)$$

Es folgt also das Übertragungsverhalten

$$\frac{U_a}{U_e} = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \quad (25)$$

sowie die Phasenverschiebung

$$\phi_H = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (26)$$

Obige Rechnungen gelten nur für harmonischen Spannungs- und Stromverläufe. Legt man an einen Hochpassfilter allerdings eine Rechteckspannung an, erkennt man für  $\omega \ll \frac{1}{RC}$  dass  $u_a(t) \approx \dot{u}_e(t)$  gilt. Der Hochpass wirkt also differenzierend.

### 1.2.2. Tiefpass

Ein einfacher Tiefpass ist aufgebaut wie in Abbildung 4 dargestellt. Der Kondensator schließt hierbei hohe Frequenzen kurz während er niedrige blockiert. Da die Ausgangsspannung am Kondensator abgegriffen wird führt dies zu einer Blockade hoher Frequenzen während niedrige abgegriffen werden können.

Wendet man die Formel für den Spannungsteiler auf obige Schaltung an, erhält man

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (27)$$

Es folgt also das Übertragungsverhalten

$$\frac{U_a}{U_e} = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (28)$$

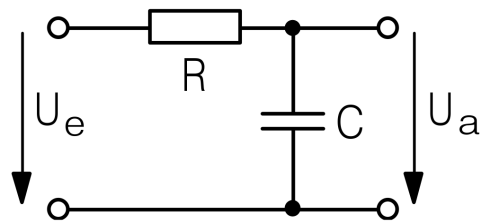


Abbildung 4: RC-Tiefpass erster Ordnung.

sowie die Phasenverschiebung

$$\phi_T = -\arctan(\omega RC) \quad (29)$$

Legt man an einen Hochpassfilter eine Rechteckspannung an, erkennt man für  $\omega \gg \frac{1}{RC}$  dass  $u_a(t) \approx \int u_e(t) dt$  gilt. Der Tiefpass wirkt also integrierend.

### 1.3. Pegelmaße

Um Verhältnisse möglichst vieler Größenordnungen übersichtlich darstellen zu können hat sich das logarithmische Pegelmaß etabliert. Für die Feldgröße *Spannung* gilt dann:

$$\text{logarithmischer Pegelunterschied} = L(U_1, U_2) := 10 \cdot \lg \frac{U_1^2}{U_2^2} \text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \text{dB} = 2 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \text{B} \quad (30)$$

Mit der Einheit  $[L] = 1 \cdot \text{dB} = \frac{1}{10} \cdot \text{B}$  (sprich: *dezi-Bel* und *Bel*).

## 2. Messprinzip, Schaltpläne und Versuchsablauf

### 2.1. Messung von Wechselspannungen

**Messprinzip und Versuchsaufbau** Der Ausgang des Signalgenerators wird durch Parallelschaltung mit dem Hand-Multimeter, dem Tisch-Multimeter und dem Oszilloskop verbunden. Anschließend wird der Ausgang des Signalgenerators auf hohe Impedanz und  $5V_{rms}$  eingestellt.

**Versuchsablauf** Für jedes Messgerät wird separat derjenige Frequenzbereich bestimmt, in welchem die angezeigte Spannung höchstens um 2% von der Angelegten abweicht.

**Versuchsparameter** Keine.

**Anmerkungen und Vorkommnisse** Keine ◀

### 2.2. Tiefpass manuell

**Messprinzip und Versuchsaufbau** Zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens eines Tiefpassfilters wird die Schaltung in Abb. 5 aufgebaut. Sowohl die Variation der Frequenzen als auch die Messungen am Oszilloskop erfolgen manuell.

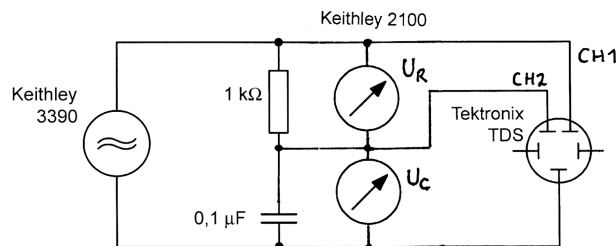


Abbildung 5: Schaltplan

**Versuchsablauf** Für die Frequenzen  $f \in \{50, 100, 200, 500, 10^3, \dots, 100 \cdot 10^3\}$  Hz werden folgende Messungen durchgeführt:

- $U_R$  und  $U_C = U_e$  werden mit den Tischmultimetern bestimmt, während die Phasendifferenz  $\Delta\phi(U_e, U_a)$  mit Hilfe der Cursorfunktion des Oszilloskops gemessen wird.
- Mit Hilfe des Oszilloskops wird  $U_R = U_e - U_C = U[CH1] - U[CH2]$  dargestellt. Mit dem Cursor wird nun die Phasendifferenz zwischen  $U_e$  und  $U_R$  gemessen.

**Versuchsparameter** Kenngrößen der Bauteile:

- Widerstand  $R = 1k\Omega$ .
- Kondensator  $C = 0.1\mu F$ .

**Anmerkungen und Vorkommnisse** Keine ◀

### 2.3. Tiefpass mit LabVIEW

**Messprinzip und Versuchsaufbau** Zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens eines Tiefpassfilters wird die Schaltung aus Abb. 5 beibehalten. Sowohl die Variation der Frequenzen als auch die Messungen mit den Tischmultimetern erfolgen nun PC gesteuert über LabVIEW.

**Versuchsablauf** Für 34 logarithmisch aufeinanderfolgende Frequenzen mit  $50\text{Hz} \leq \nu \leq 100000\text{Hz}$  werden folgende Messungen durchgeführt:

- $U_R$  und  $U_C = U_e$  werden automatisch mit den Tischmultimetern ausgelesen.

**Versuchsparameter** Kenngrößen der Bauteile:

- Widerstand  $R = 1\text{k}\Omega$ .
- Kondensator  $C = 0.1\mu\text{F}$ .

**Anmerkungen und Vorkommnisse** Keine ◀

## 2.4. Integrier- und Differenzierverhalten

**Messprinzip und Versuchsaufbau** Der Aufbau in Abb. 5 wird beibehalten. Der Frequenzgenerator wird auf Rechtecksignal gestellt und das Oszilloskop via PC und LabView ausgelesen.

**Versuchsablauf**

- Die Ein- und Ausgangsspannungsverläufe werden für verschiedene Frequenzen um die Grenzfrequenz herum beobachtet und verglichen.
- Mit LabView wird die Signalkurve für jede gemessene Frequenz abgespeichert.
- Nun werden  $R$  und  $C$  in Abb. 5 vertauscht. Der dadurch entstandene Hochpass wird mit den selben Frequenzen analog untersucht.

**Versuchsparameter** Bauteile siehe oben.

- Für folgende Frequenzen wurden Snapshots aufgenommen (je für Hoch- und Tiefpass):  $\nu \in \{50, 500, 1000, 1200, 1400, 1600, 1800, 2000, 2500, 3000, 10000, 50000\}\text{Hz}$ .

**Anmerkungen und Vorkommnisse** Keine ◀

## 2.5. Oszilloskop-Tastkopf

**Messprinzip und Versuchsaufbau** Der Tastkopf wird an das Oszilloskop (CH1) angeschlossen. Die Tastkopfspitze wird mit dem Kalibrierenausgang des Oszilloskops verbunden. Nun wird der Tastkopf auf eine Signalabschwächung von 1 : 10 gestellt.

**Versuchsablauf** Mit Hilfe des Trimmers am Tastkopf wird das gemessene Signal so lange optimiert, bis ein scharfes Rechtecksignal zu beobachten ist. Im Anschluss wird die Zuleitung des Tastkopfes mit Hilfe einer BNC-Kupplung verlängert. Die Störeinflüsse auf das gemessene Kalibriersignal werden qualitativ erfasst.

**Versuchsparameter** Keine.

**Anmerkungen und Vorkommnisse** Keine ◀

### 3. Berechnungen & Formeln

#### 3.1. Tiefpass

Im Folgenden ist

- $U_a$ :  $[U_a] = 1\text{V}$  die am Kondensator abgegriffene Ausgangsspannung.
- $U_e$ :  $[U_e] = 1\text{V}$  die am Tiefpass anliegende Eingangsspannung.
- $\omega$ :  $[\omega] = 1\frac{1}{\text{s}}$  die Kreisfrequenz der Eingangsspannung.
- $R$ :  $[R] = 1\Omega$  der ohmsche Widerstand des Spannungsteilers.
- $C$ :  $[C] = 1\text{F}$  die Kapazität des Kondensators.
- $\varphi_T$ :  $[\varphi_T] = 1$  die Phasenverschiebung zwischen  $U_a$  und  $U_e$ .
- $X_C$ :  $[X_C] = 1\Omega$  der Blindwiderstand des Kondensators.
- $\nu$ :  $[\nu] = 1\text{Hz}$  die Frequenz der Eingangsspannung.
- $\Delta\varphi$ :  $[\Delta\varphi] = 1$  die Phasenverschiebung zweier periodischer Signale.
- $\Delta t$ :  $[\Delta t] = 1\text{s}$  die absolute Zeitverschiebung zweier periodischer Signale.

**Amplitudengang** Der Amplitudengang eines RC-Tiefpasses ist gegeben durch

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (31)$$

**Phasengang** Der Phasengang eines RC-Tiefpasses gehorcht

$$|\varphi_T| = \arctan(\omega RC) \quad (32)$$

**Scheinwiderstand** Der Blindwiderstand des Kondensators im Tiefpass berechnet sich zu

$$X_C = \frac{R}{\sqrt{\frac{U_e^2}{U_a^2} - 1}} \quad \text{mit} \quad U_a = U_a(\omega) \quad (33)$$

**Phasenverschiebung** Bei gegebener Frequenz und zeitlicher Verschiebung gilt für die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = 2\pi\nu \cdot \Delta t \quad (34)$$

## 4. Auswertung

### 4.1. Messung von Wechselspannungen

Der Effektivwert der angelegten Sinusschwingung wurde vom Frequenzgenerator konstant auf  $V_{rms} = 5.0V$  gehalten. Als angestrebten Anzeigebereich setzen wir  $0.98 \cdot U_{rms} = 4.9V \leq U_{mess} \leq 5.1V = 1.02 \cdot U_{rms}$ . Dieser Spannungsbereich wurde für folgende Frequenzbereiche eingehalten:

	$\nu_{min}$	$U_{min}$	$\nu_{max}$	$U_{max}$
<b>Messgerät</b>	[Hz]	[V]	[Hz]	[V]
Handmultimeter	11	5.1	$2 \cdot 10^3$	4.9
Tischmultimeter	8	4.9	$655 \cdot 10^3$	4.9
Oszilloskop	11	-	$5 \cdot 10^6$	$> 5.1V$

Wie zu erwarten war, deckt das Handmultimeter den kleinsten Frequenzbereich ab. Das Tischmultimeter lässt sich hingegen bis zu deutlich höheren Frequenzen nutzen. Das Oszilloskop kommt zwar mit noch deutlich höheren Frequenzen zurecht, hierbei muss aber beachtet werden, dass bei Frequenzen über 5 MHz Fehler durch die Leitungsimpedanz auftreten.

### 4.2. Tiefpass

#### 4.2.1. Manuelle Datenaufnahme

**Phasenverschiebung** Die folgende Tabelle zeigt die manuell gemessenen Spannungen  $U_R$  und  $U_C$  sowie die nach (34) berechneten Phasendifferenzen zwischen  $U_e$  und  $U_a = U_C$ .

Frequenz $\nu$	$U_R$	$U_C$	$\Delta t$	$\Delta\varphi$
[Hz]	[V]	[V]	[ $\mu s$ ]	[1]
50	0.158	4.982	0.00	0.000
100	0.316	4.975	80.00	0.050
200	0.626	4.943	100.00	0.126
500	1.496	4.730	100.00	0.314
1000	2.621	4.150	100.00	0.628
2000	3.781	3.001	72.00	0.905
5000	4.544	1.445	42.00	1.319
10000	4.690	0.750	24.00	1.508
20000	4.733	0.380	12.40	1.558
50000	4.748	0.153	4.80	1.508
100000	4.749	0.077	2.44	1.533

Tabelle 1: Manuelle Messung der Übertragungsfunktion und Berechnung der Phasenverschiebung. Darstellung der Daten in Abb. 6 und 9.

**Strom und Spannung** Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wurde gemessen, indem selbige zwischen  $U_e - U_C = U_R$  und  $U_e$  am Oszilloskop manuell abgelesen wurde. Die berechneten Phasenverschiebungen sind in Tab. 2 zu finden, welche nach (34) errechnet wurden. Aus der grafischen Darstellung der Phasenverschiebung in Abb. 10 erkennt man sofort, dass die Phasenverschiebung des Stromes von der Frequenz der angelegten Wechselspannung abhängt. Bei niedrigen Frequenzen eilt der Strom der angelegten Spannung um ca.  $\frac{\pi}{2}$  voraus, während er bei sehr hohen Frequenzen in Phase mit der oszillierenden Spannung ist.

Die grafischen Darstellungen der Daten aus Tab. 1 und Tab. 2 finden sich in Abb. 6 und 9 sowie Abb. 10.

Frequenz $\nu$	$\Delta t$	$\Delta\varphi$
[Hz]	$[\mu s]$	[1]
50	4400.00	1.382
100	2200.00	1.382
200	1080.00	1.357
500	380.00	1.194
1000	168.00	1.056
2000	58.00	0.729
5000	10.00	0.314
10000	1.20	0.075
20000	0.40	0.050
50000	0.00	0.000
100000	0.00	0.000

Tabelle 2: Manuelle Messung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Darstellung der Daten in Abb. 10.

**Blindwiderstand** Wir errechnen gemäß (33) aus den Daten in Tab. 1 den Blindwiderstand  $X_C$  des Kondensators und plotten diesen in Abb. 8. Man erkennt qualitativ leicht eine Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Frequenz. Um ein qualitatives Gesetz abzuleiten machen wir den Ansatz  $f_{a_1}(\nu) = \frac{a_1}{\nu}$  und lassen `gnuplot` eine solche Funktion an die Messdaten anfiten. Der Fitparameter ergibt sich zu  $a_1 = 1.46708 \cdot 10^6$ . Da die Fitfunktion  $f(\nu)_{a_1}$  das Verhalten des Kondensators offenbar gut beschreibt leiten wir folgende Gesetzmäßigkeit aus der Messung ab:

$$|X_C| \propto \frac{1}{\omega} \quad (35)$$

Dies bestätigt die Theorie wonach

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (36)$$

Demnach ist  $a_1 = \frac{1}{2\pi\{C\}}$  womit für die Kapazität  $C(a_1) = \frac{1}{2\pi a_1} F \approx 0.11\mu F$  folgt. Dies stimmt gut mit dem Sollwert des verwendeten  $0.1\mu F$ -Kondensators überein.

**Grenzfrequenz** Die 3dB-Grenzfrequenz ist beim RC-Tief- bzw. Hochpass gegeben durch  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ , denn es gilt dann für die Signalabschwächung:

$$L = 10 \cdot \lg \left( \frac{U_a}{U_e} \right)^2 \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{1}{2} \text{ dB} \approx -3\text{dB} \quad (37)$$

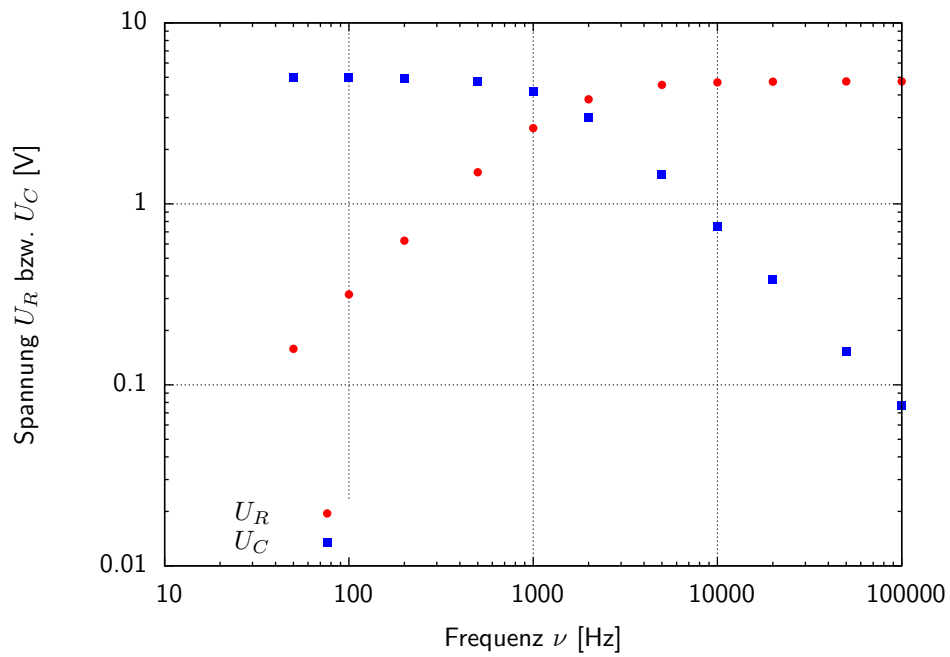
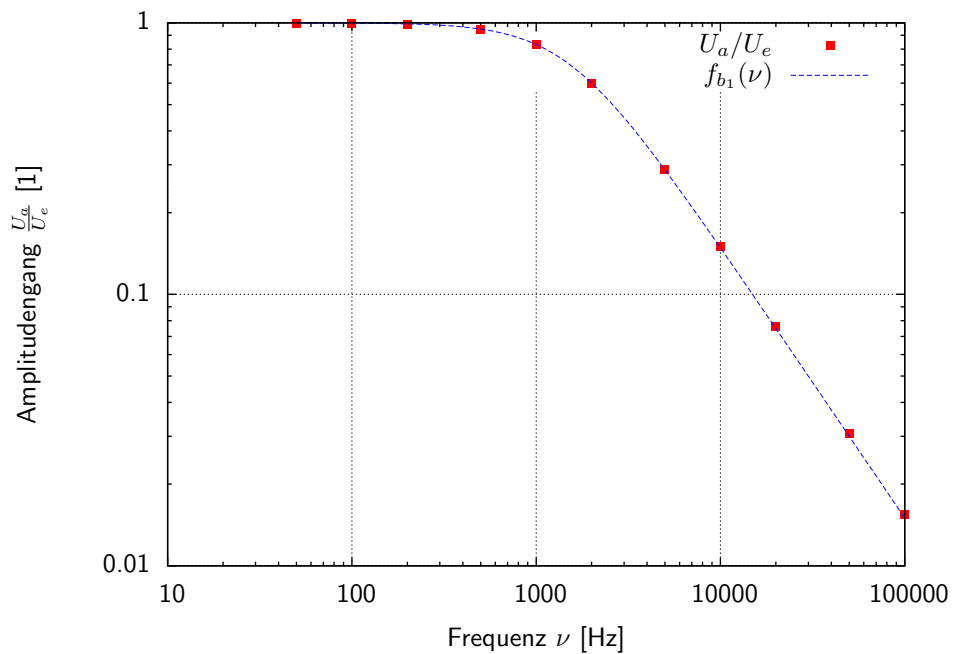
Wobei  $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \stackrel{\omega=\omega_0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $|\varphi| = \arctan(\omega RC) \stackrel{\omega=\omega_0}{=} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  nach den Gleichungen (31) und (32) gilt.

Wir setzen daher im Plot des Amplitudengangs in Abb. 7 eine Fitfunktion  $f_{b_1}(\nu) = (1 + (2\pi\nu b_1)^2)^{-\frac{1}{2}}$  an während im Phasengangplot in Abb. 9 ein Fitansatz  $f_{c_1}(\nu) = \arctan(2\pi\nu c_1)$  zum Einsatz kommt. Dies liefert die Fitparameter  $b_1 = 0.000106095$  und  $c_1 = 0.00011079$  und damit die folgenden Werte für die 3dB-Grenzfrequenz:

$$\omega_0(b_1) = \frac{1}{b_1 s} \approx 9426 \frac{1}{s} \Rightarrow \nu_0(b_1) = \frac{\omega_0(b_1)}{2\pi} \approx 1500\text{Hz} \quad (38)$$

$$\omega_0(c_1) = \frac{1}{c_1 s} \approx 9026 \frac{1}{s} \Rightarrow \nu_0(c_1) = \frac{\omega_0(c_1)}{2\pi} \approx 1437\text{Hz} \quad (39)$$

Wird der Tiefpass mit der 3dB-Grenzfrequenz angesteuert, so prognostiziert obige Rechnung eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ . Ein Blick in Abb. 9 bestätigt diese theoretische Berechnung.

Abbildung 6: Doppellogarithmischer Plot von  $U_R$  und  $U_C$  gegen die Frequenz (manuelle Daten).Abbildung 7: Doppellogarithmischer Plot des Amplitudengangs  $\frac{U_a}{U_e}$  gegen die Frequenz (manuelle Daten).

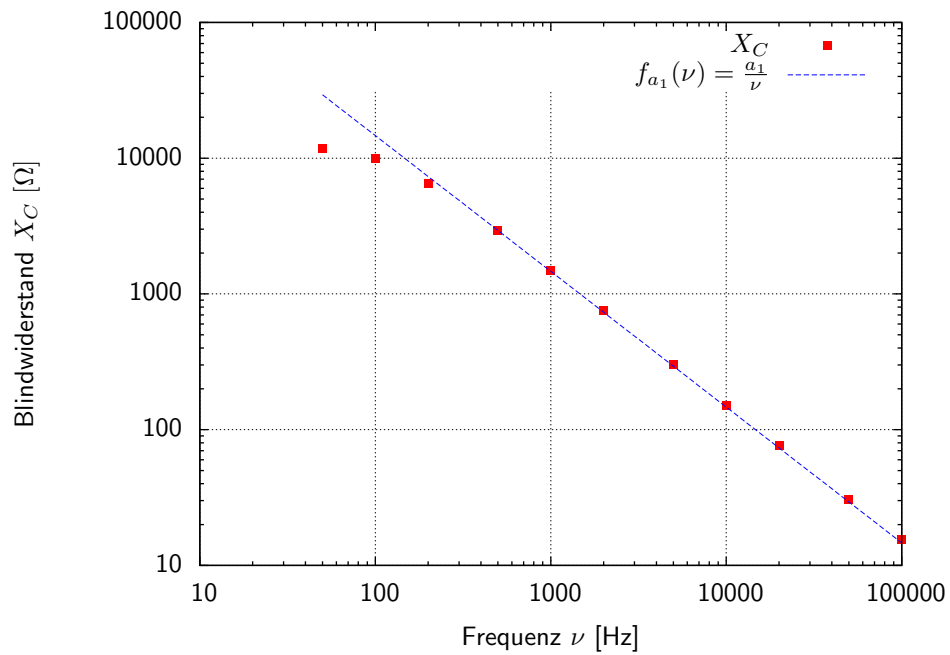


Abbildung 8: Doppellogarithmischer Plot des Blindwiderstandes  $X_C$  gegen die Frequenz (manuelle Daten).

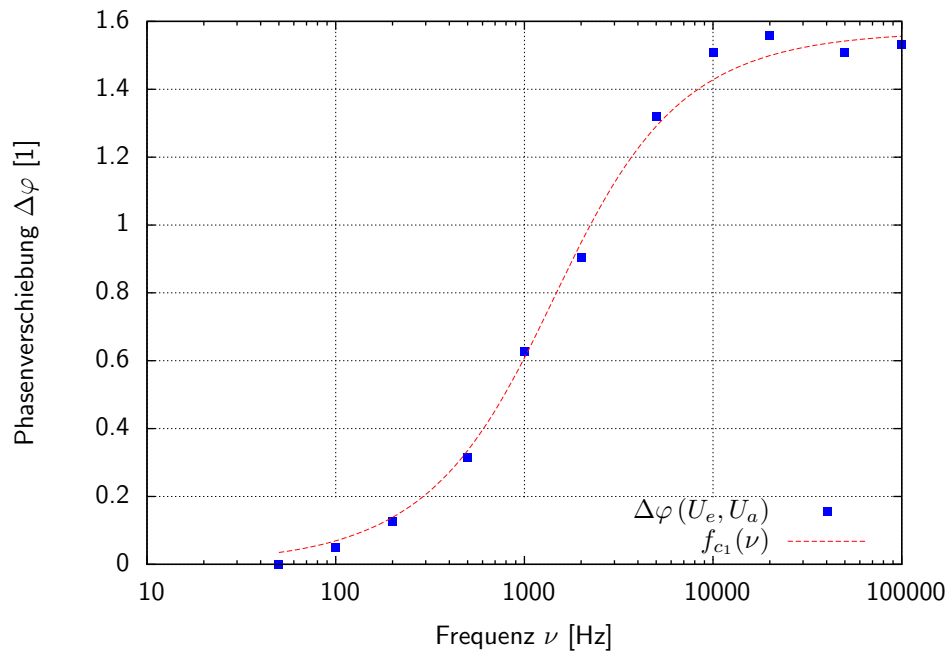


Abbildung 9: Halblogarithmischer Plot von  $\Delta\varphi(U_e, U_a)$  gegen die Frequenz (manuelle Daten).

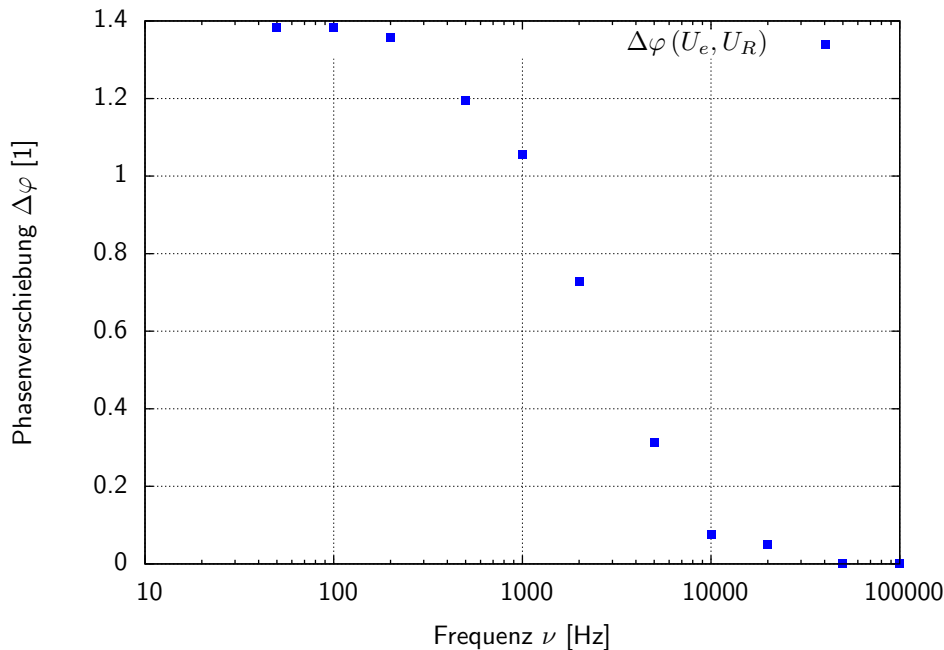


Abbildung 10: Halblogarithmischer Plot von  $\Delta\varphi(U_e, U_R)$  gegen die Frequenz (manuelle Daten).

#### 4.2.2. LabVIEW-Umsetzung

Die mit dem PC automatisch aufgenommenen Spannungswerte für  $U_C = U_a$  und  $U_R$  für verschiedene Frequenzen zwischen 50Hz und 100000Hz sind in Abb. 11 doppellogarithmisch aufgetragen. Man erkennt deutlich einen Knick im Bereich der 3dB-Grenzfrequenz. Dort beginnt der Tiefpass also die an den Bauteilen abfallende Spannung drastisch umzuverteilen (nämlich vom Kondensator - also dem Ausgang - hin zum ohmschen Widerstand). Hierin manifestiert sich gerade die Filtereigenschaft.

**Blindwiderstand** Um den Blindwiderstand  $X_C$  des Kondensators zu berechnen benutzen wir wieder Gleichung (33). Die so verarbeiteten Daten sind in Abb. 13 aufgetragen. Man erkennt (bis auf kleine Abweichungen bei niedrigen Frequenzen) wieder die schon bei der manuellen Auswertung gefundene Abhängigkeit

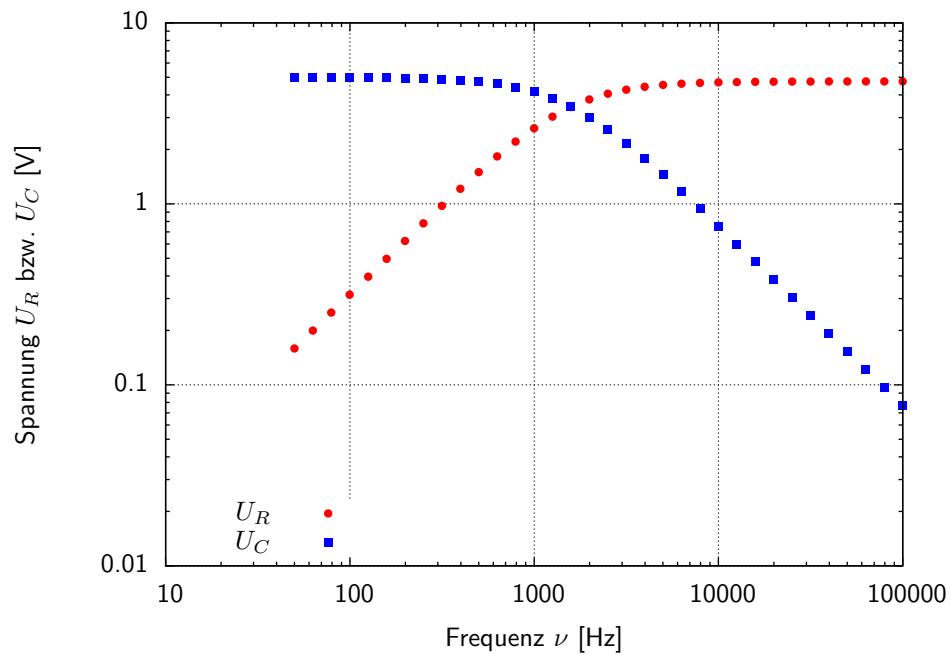
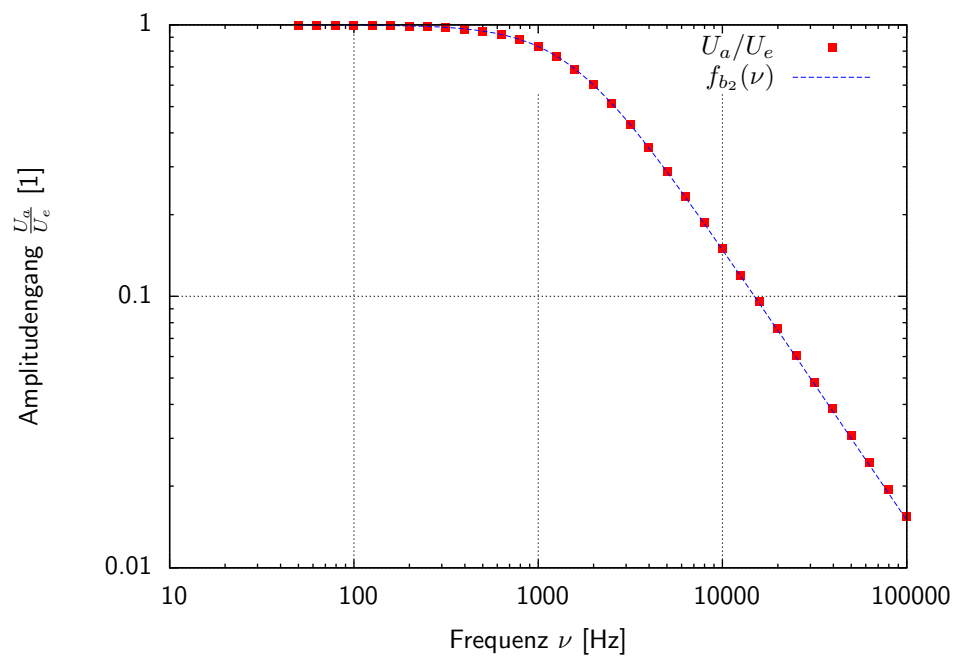
$$|X_C| \propto \frac{1}{\omega} \quad (40)$$

Setzen wir analog zum manuellen Fall eine Fitfunktion vom Typ  $f_{a_2} = \frac{a_2}{\omega}$  an, erhalten wir den Fitparameter  $a_2 = 1.43748 \cdot 10^6$ . Analog zur Auswertung der manuellen Daten ergibt sich für die Kapazität  $C(a_2) = \frac{1}{2\pi a_2} F \approx 0.11 \mu F$ . Dies bestätigt unseren oben errechneten Wert.

**Grenzfrequenz** Um die 3dB-Grenzfrequenz zu bestimmen setzen wir wieder eine Fitfunktion vom Typ  $f_{b_2}(\nu)$  an. In Abb. 12 ist der automatisch aufgezeichnete Amplitudengang mit der zugehörigen Fitkurve  $f_{b_2}$  dargestellt. Diese liefert den Fitparameter  $b_2 = 0.000106087$  und damit den folgenden Wert für die 3dB-Grenzfrequenz:

$$\omega_0(b_2) = \frac{1}{b_2 s} \approx 9426 \frac{1}{s} \Rightarrow \nu_0(b_2) = \frac{\omega_0(b_2)}{2\pi} \approx 1500 \text{ Hz} \quad (41)$$

Auch hier bestätigt sich unser manuell gemessener Wert.

Abbildung 11: Doppelloarithmischer Plot von  $U_R$  und  $U_C$  gegen die Frequenz (LabVIEW Daten).Abbildung 12: Doppelloarithmischer Plot des Amplitudengangs  $\frac{U_a}{U_e}$  gegen die Frequenz (LabVIEW Daten).

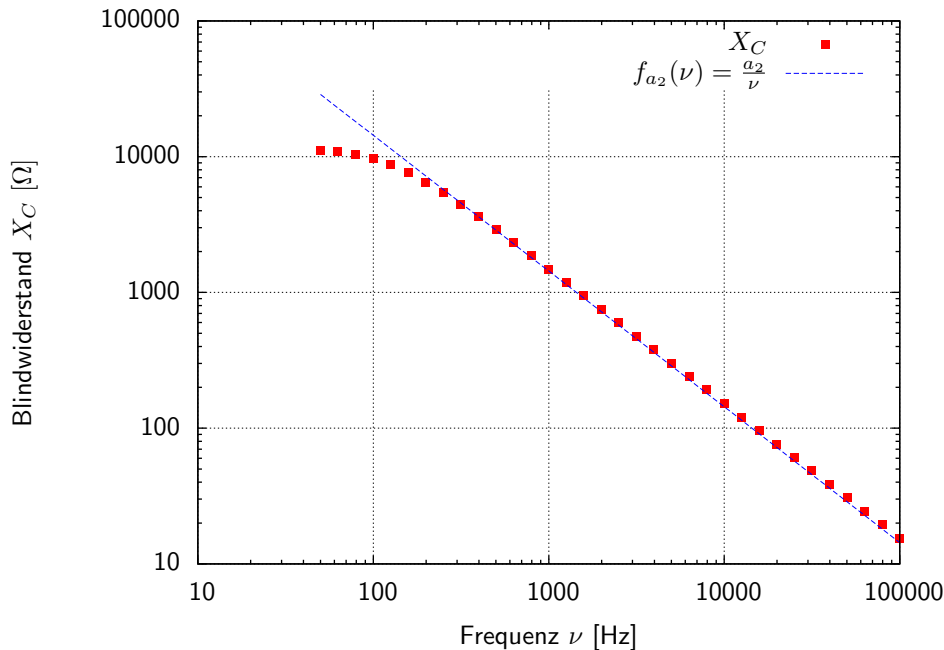


Abbildung 13: Doppellogarithmischer Plot des Blindwiderstandes  $X_C$  gegen die Frequenz (LabVIEW Daten).

### 4.3. Integrier- und Differenzierverhalten

#### 4.3.1. Tiefpass

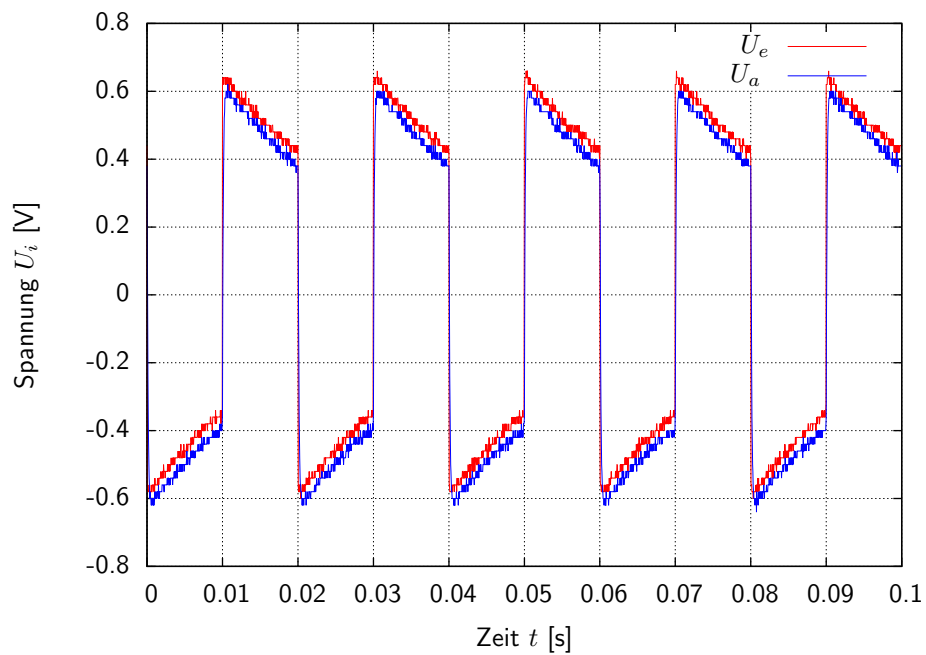
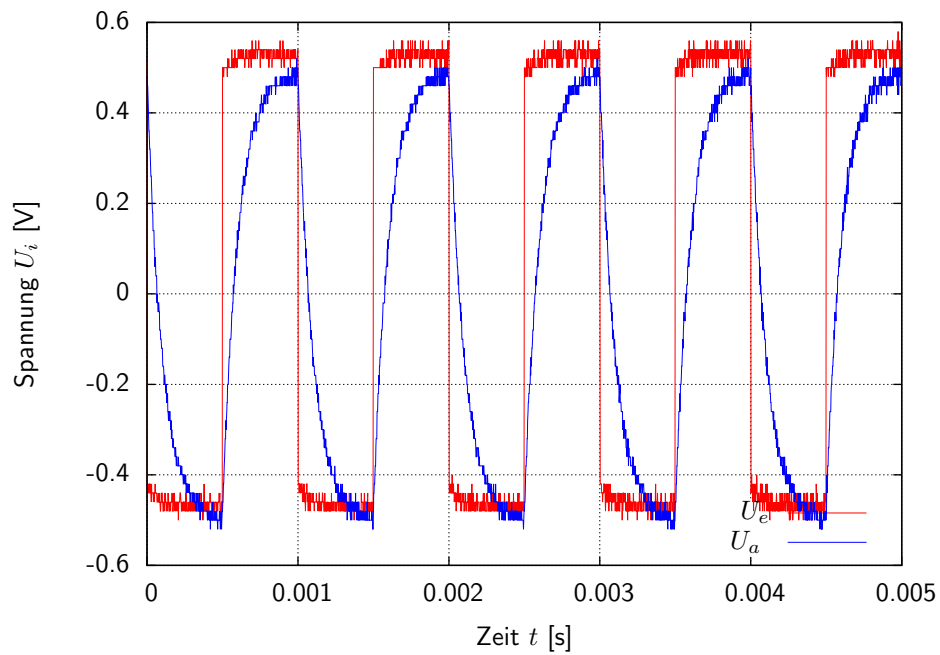
Legt man an den Tiefpass eine Rechteckspannung an, entspricht die Antwort des Netzwerks in periodischen Abständen der Sprungantwort. Wird die Spannung ein (oder aus) geschaltet, muss der gesamte Lade- bzw. Entladestrom über den ohmschen Widerstand fließen. Es gilt also:

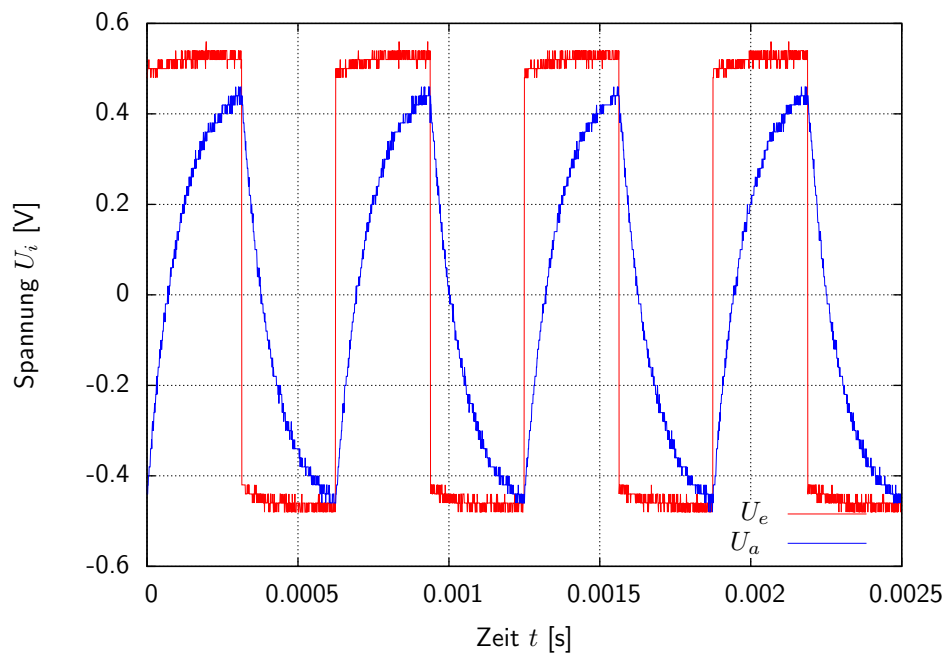
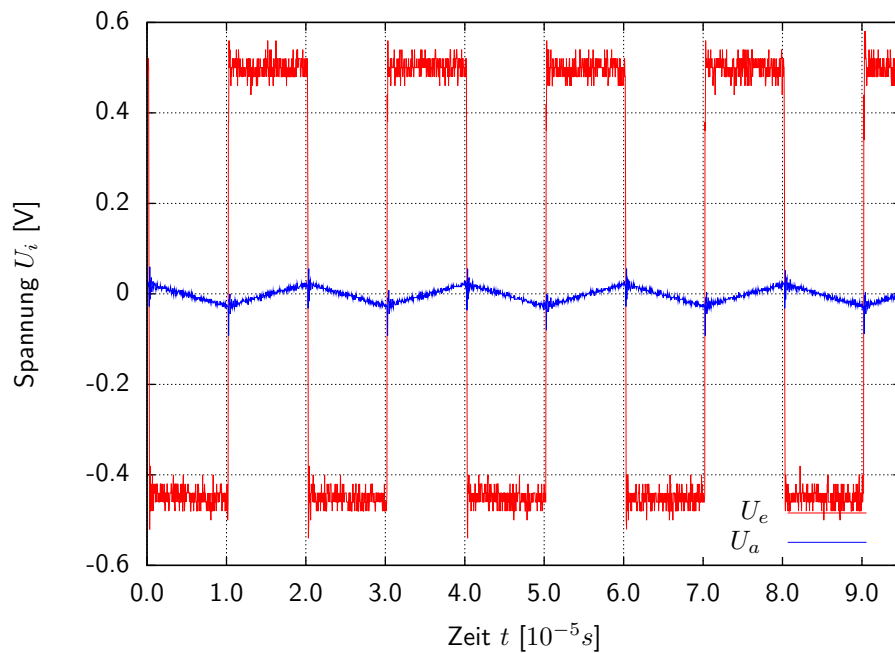
$$\frac{U_e - U_a}{R} = C \cdot \dot{U}_a \Leftrightarrow U_e - U_a = RC \cdot \dot{U}_a \quad (42)$$

Wird der Tiefpass deutlich über der Grenzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  betrieben gilt nach (31) näherungsweise  $U_e - U_a \approx U_e$ . Damit folgt

$$U_e = RC \cdot \dot{U}_a \quad \Rightarrow \quad U_a = \frac{1}{RC} \int U_e(t) dt \quad (43)$$

Damit wirkt der Tiefpass für  $\omega \gg \omega_0$  näherungsweise integrierend. Dies ist in den folgenden 4 Abbildungen gut zu erkennen. In Abb. 14 ist die Frequenz so niedrig, dass der Tiefpass sie fast vollständig passieren lässt und die Wellenform zwischen  $U_e$  und  $U_a$  nicht verändert. Zwischen den Abbildungen 15 und 16 überschreitet die Frequenz  $\omega$  die Grenzfrequenz  $\omega_0$ . Man erkennt deutlich die am Ausgangssignal wirksamen Manipulationen. Sowohl ansteigende als auch abfallende Flanken werden vom Kondensator geglättet. Diese Kurven beginnen zunehmend die integrierenden Eigenschaften aufzuweisen. In Abb. 17 schließlich ist die Frequenz so hoch, dass der Tiefpass fast vollständig sperrt. Der geringe Anteil der Spannung, welcher noch am Kondensator abfällt, entspricht nun aber fast vollständig dem Integral des Eingangssignals. Zudem erkennt man, dass das Ausgangssignal mit steigender Frequenz dem Mittelwert des Eingangssignals zustrebt, da der Kondensator dem Auf- und Entladen nicht mehr folgen kann.

Abbildung 14: Spannungsverlauf am Tiefpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 50\text{Hz}$ .Abbildung 15: Spannungsverlauf am Tiefpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 1000\text{Hz}$ .

Abbildung 16: Spannungsverlauf am Tiefpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 1600\text{Hz}$ .Abbildung 17: Spannungsverlauf am Tiefpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 10000\text{Hz}$ .

### 4.3.2. Hochpass

Legt man an den Tiefpass eine Rechteckspannung an, entspricht auch hier die Antwort des Netzwerks der Sprungantwort. Analog zum Tiefpass folgt:

$$\frac{U_a}{R} = C \cdot \frac{d}{dt} (U_e - U_a) \Leftrightarrow (\dot{U}_e - \dot{U}_a) RC = U_a \quad (44)$$

Wird der Hochpass deutlich unter der Grenzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  betrieben gilt nach (25) näherungsweise  $U_e - U_a \approx U_e$ . Damit folgt

$$\dot{U}_e \cdot RC = U_a \quad \Rightarrow \quad U_a = RC \cdot \frac{d}{dt} U_e(t) \quad (45)$$

Damit wirkt der Hochpass für  $\omega \ll \omega_0$  näherungsweise differenzierend. Dies ist in den folgenden 4 Abbildungen dargestellt. In Abb. 18 ist die Frequenz weit unter der Grenzfrequenz, sodass der Hochpass sie fast vollständig blockiert. Der geringe Teil des Signals, welches den Hochpass passiert, entspricht in guter Näherung der Ableitung des Eingangssignales ( $\delta$ -Peaks an den Flanken). Zwischen den Abbildungen 19 und 20 überschreitet die Frequenz  $\omega$  die Grenzfrequenz  $\omega_0$ . Das Differenzierverhalten wird zunehmend undeutlicher. Da die Frequenzen steigen wird der Kondensator immer durchlässiger und am Widerstand fällt zunehmend mehr Spannung ab. In Abb. 21 schließlich ist die Frequenz so hoch, dass der Hochpass fast vollständig durchlässig geworden ist. Der Kondensator hat praktisch keinen Widerstand mehr und die gesamte Spannung fällt gemäß Gleichung (26) ohne Phasenverzögerung am ohmschen Widerstand ab.

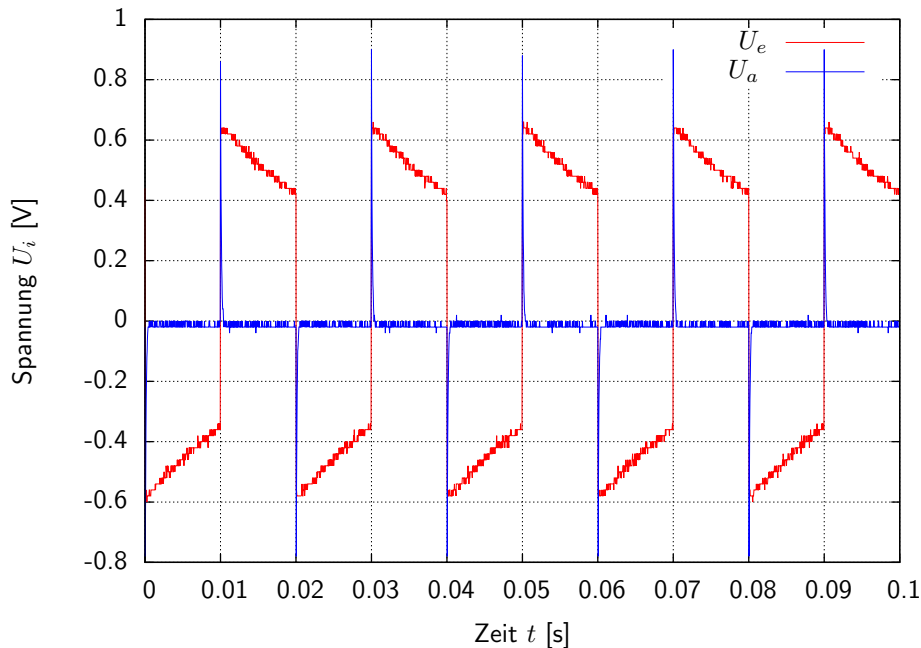
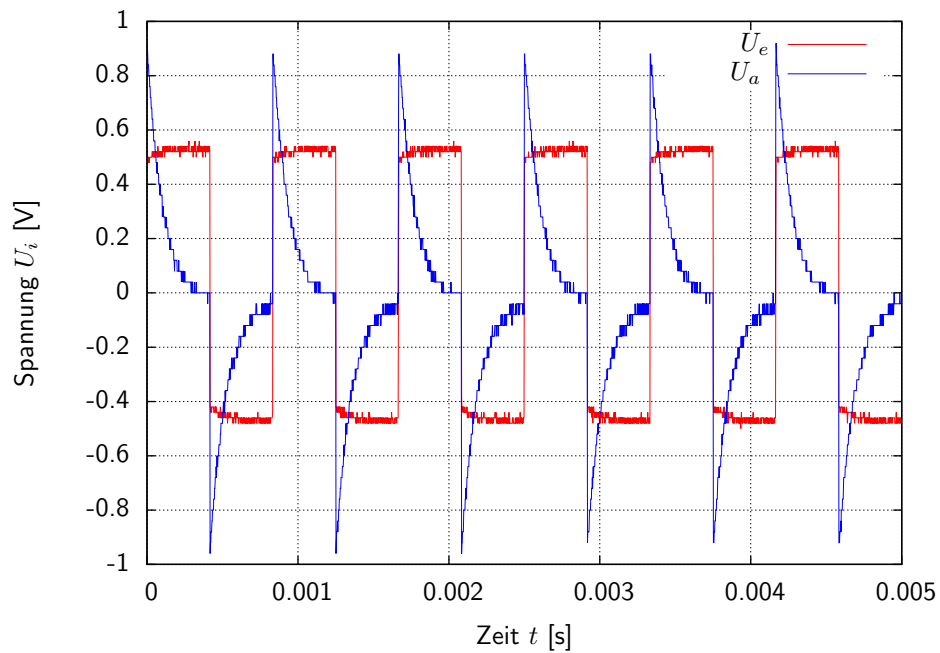
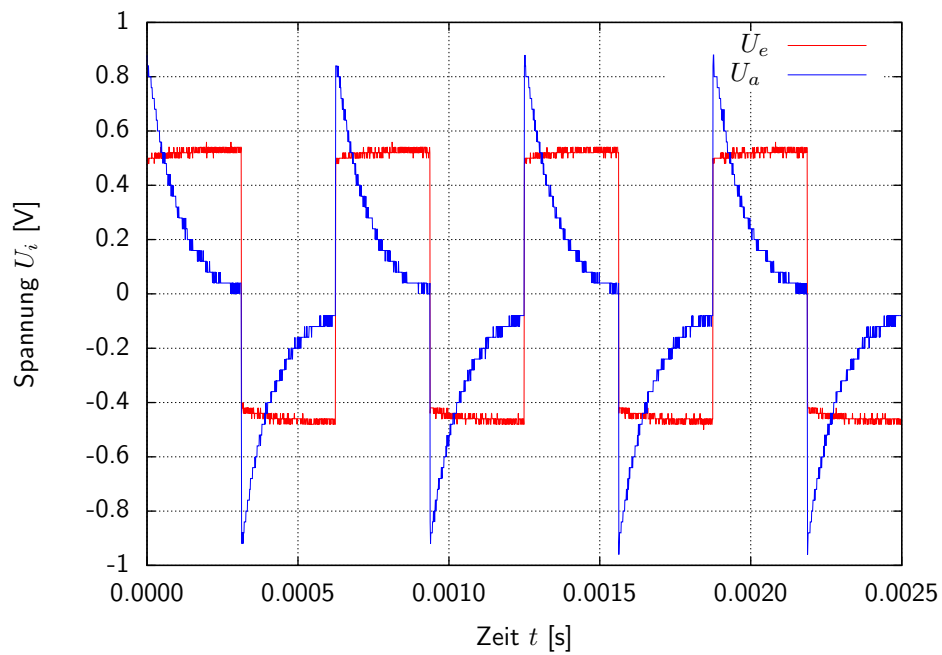


Abbildung 18: Spannungsverlauf am Hochpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 50\text{Hz}$ .

Abbildung 19: Spannungsverlauf am Hochpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 1000\text{Hz}$ .Abbildung 20: Spannungsverlauf am Hochpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 1600\text{Hz}$ .

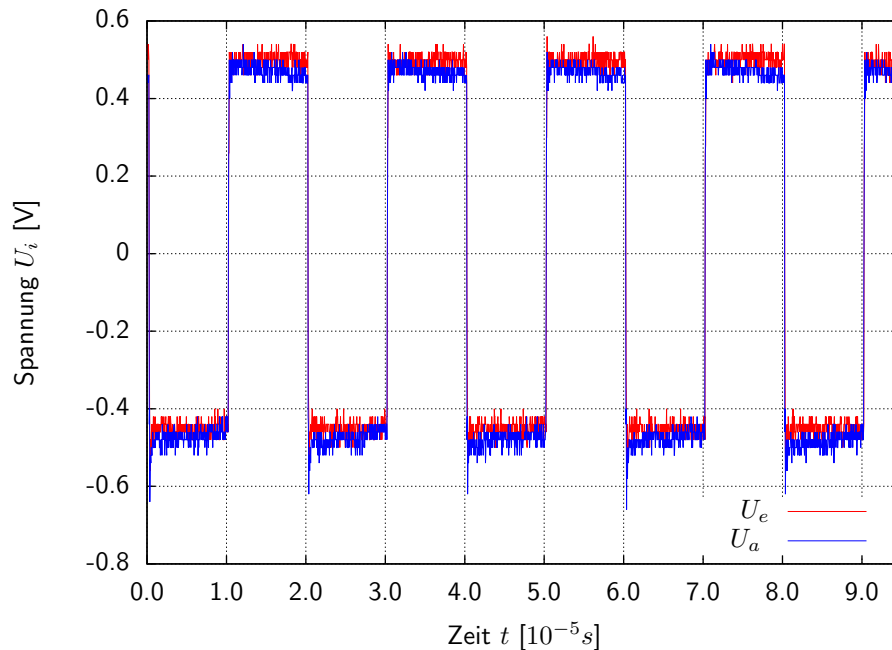


Abbildung 21: Spannungsverlauf am Hochpass von  $U_e$  und  $U_a$  über die Zeit bei  $\nu = 10000\text{Hz}$ .

#### 4.4. Oszilloskop-Tastkopf

Wird der Tastkopf ordnungsgemäß an die Kalibrierfrequenz des Oszilloskops angeschlossen ergibt sich bei schlechten Einstellungen des Trimmers (bei 1:10 Signalabschwächung) ein “abgerundetes” Rechtecksignal, welches dem aus Abb. 15 ähnelt. Variiert man die Trimmereinstellung, so lässt sich ein scharfes Rechtecksignal erreichen, ähnlich wie in Abb. 21. Die Wellenform bei schlechter Trimmung entspricht der des Tiefpasses bei mittleren Frequenzen. Demnach wirkt das Koaxialkabel des Tastkopfes mit seiner unvermeidbaren Kapazität als Tiefpassfilter der hohe Messfrequenzen bei fehlender Kompensation durch integrierendes Verhalten verändert und so zu Messfehlern führt. Das die am Trimmer einzustellende Kompensation von der Länge der Messleitung abhängt, wurde durch das Zwischenschalten einer weiteren Messleitung mit Hilfe einer BNC-Kupplung festgestellt. Eine Verdopplung der Leitungslänge (und damit Verdopplung der Gesamtkapazität des Kabels) führte wieder zu deutlich verzerrten Messsignalen.

## 5. Fehlerrechnung

Die 3dB-Grenzfrequenz von RC-Hoch- und Tiefpass ergibt sich aus den Kenngrößen der verwendeten Bauteile zu

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{RC} = 10000 \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \hat{\nu}_0 = \frac{\hat{\omega}_0}{2\pi} \approx 1592 \text{Hz} \quad (46)$$

Wobei die Kenngrößen  $R = 1000\Omega$  und  $C = 0.1 \cdot 10^{-6}\text{F}$  benutzt wurden.

### 5.0.1. Tiefpass manuell

- Die relative Abweichung der Kapazität  $C(a_1)$  vom Kennwert ergibt sich zu

$$\delta[C(a_1)] = \frac{C(a_1) - C}{C} = 0.1 = 10\% \quad (47)$$

- Die relativen Abweichungen der 3dB-Grenzfrequenzen, welche sich aus Amplitudengang- und Phasengangplots ergaben, sind

$$\delta[\omega_0(b_1)] = \frac{\omega_0(b_1) - \hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_0} \approx -0.057 = -5.7\% \quad (48)$$

$$\delta[\omega_0(c_1)] = \frac{\omega_0(c_1) - \hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_0} \approx -0.097 = -9.7\% \quad (49)$$

$$(50)$$

### 5.0.2. Tiefpass LabVIEW

- Für die relative Abweichung der Kapazität  $C(a_2)$  ergibt sich analog zu oben

$$\delta[C(a_2)] = \frac{C(a_2) - C}{C} = 0.1 = 10\% \quad (51)$$

- Die relative Abweichung der 3dB-Grenzfrequenz, welche sich aus dem Amplitudengangplot ergab, ist

$$\delta[\omega_0(b_2)] = \frac{\omega_0(b_2) - \hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_0} \approx -0.057 = -5.7\% \quad (52)$$

$$(53)$$

Die gemessenen Abweichungen von den theoretischen bzw. angegebenen Werten sind vermutlich weniger auf Messfehler als vielmehr auf die hohe Toleranz der Kapazitätsangabe des Kondensators zurückzuführen. Auf dem Kondensator wurde die Toleranz mit Buchstaben codiert. Bei diesem Versuch kam ein Kondensator der Klasse M zum Einsatz, was einer Toleranz von  $\pm 20\%$  entspricht. Damit liegt die berechnete Abweichung von  $+10\%$  im Rahmen des Toleranzbereiches.

## 6. Zusammenfassung

**Messung von Wechselspannungen** Die Messungen ergaben, dass das Handmultimeter im Bereich  $11\text{Hz} \leq \nu \leq 2\text{kHz}$  brauchbare Effektivwerte der Spannung liefert. Das Tischmultimeter erreicht dieselbe Genauigkeit im Bereich  $8\text{Hz} \leq \nu \leq 655\text{kHz}$  während das Oszilloskop sogar bei Frequenzen von  $11\text{Hz} \leq \nu \leq 5\text{MHz}$  noch Effektivwerte mit weniger als 2% Abweichung liefert.

**Tiefpass** Der Verlauf von Eingangsspannung und Ausgangsspannung am RC-Tiefpassfilter bestätigte sowohl bei der manuellen als auch bei der automatisierten Datenaufnahme mit hoher Genauigkeit die theoretischen Berechnungen. Die 3dB-Grenzfrequenz wurde aus unterschiedlichen Datensätzen berechnet zu

$$\nu_0(b_1) \approx 1500\text{Hz} \quad \delta[\nu_0(b_1)] \approx -5.7\% \quad (54)$$

$$\nu_0(c_1) \approx 1437\text{Hz} \quad \delta[\nu_0(c_1)] \approx -9.7\% \quad (55)$$

$$\nu_0(b_2) \approx 1500\text{Hz} \quad \delta[\nu_0(b_2)] \approx -5.7\% \quad (56)$$

Wobei die theoretisch berechnete Grenzfrequenz  $\hat{\nu}_0 = 1592\text{Hz}$  beträgt. Eingangs- und Ausgangssignal sind im Falle  $\omega = \omega_0$  gerade um  $\frac{\pi}{4}$  phasenverschoben. Diese Verschiebung konnte ebenfalls qualitativ verifiziert werden.

**Integrier- und Differenzierverhalten** Gemäß der Theorie wurde beim Tiefpass für  $\omega \gg \omega_0$  das integrierende Verhalten festgestellt. Das Rechtecksignal wurde in guter Näherung zum Dreieckssignal welches dem Integral über die Rechteckfunktion entspricht. Analog konnte beim Hochpass das differenzierende Verhalten verifiziert werden. Für  $\omega \ll \omega_0$  wurde das Rechtecksignal zu einem  $\delta$ -Kamm transformiert, welcher im distributionellen Sinne die Ableitung der Rechteckfunktion darstellt.

**Oszilloskop-Tastkopf** Der Tastkopf wurde bei 1:10 Signalabschwächung erfolgreich mit dem Kalibriersignal abgeglichen. Der Abgleich ist erforderlich, da die Messleitung mit ihrem Kapazitätsbelag als Tiefpassfilter fungiert und analog zu vorherigem Abschnitt das Signal transformiert und damit verfälscht. Die Anpassung ist dabei abhängig von der Leitungslänge (i.e. der Leitungskapazität).

## A. Messwerte

.

.