Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ Element des linearen Vektorraumes der komplexwertigen $(m \times n)$-Matrizen. Auf diesem sei die Hilbert-Schmidt-Norm wie folgt gegeben

$$\|A\|_{HS} := \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|A_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Jede Matrix kann unter Vorgabe zweier Basen $\mathcal{B} = (b_l)_{l=1...n}$ und $\mathcal{C} = (c_i)_{i=1...m}$ als Homomorphismus von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^m$ interpretiert werden, wobei $b_l := (\delta_{l1}, ..., \delta_{ln})^t$ und $c_i := (\delta_{i1}, ..., \delta_{im})^t$. Dann gilt für den linearen Operator $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$:

$$(Ax)_k := \sum_{l=1}^{n} A_{kl}x_l \tag{2}$$

Bezeichne im Folgenden $\|A\| := \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)}$ die bekannte Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.

a) Es ist zu zeigen, dass (1) eine Norm auf $\mathbb{C}^{m\times n}$ beschreibt. Wir definieren hierfür die folgende hermitesche, positiv definite Sesquilinearform

$$\langle A, B\rangle_{HS} := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} A_{kl}\overline{B_{kl}} \tag{3}$$

Es ist offenbar

$$\begin{aligned}
\langle A + \tilde{A}, B\rangle_{HS} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left(A_{kl} + \tilde{A}_{kl}\right)\overline{B_{kl}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left(A_{kl}\overline{B_{kl}} + \tilde{A}_{kl}\overline{B_{kl}}\right) = \langle A, B\rangle_{HS} + \langle \tilde{A}, B\rangle_{HS} \\
\langle \lambda A, B\rangle_{HS} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(\lambda A_{kl})\overline{B_{kl}} = \lambda\langle A, B\rangle_{HS} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} A_{kl}\overline{\overline{\lambda}B_{kl}} = \langle A, \overline{\lambda}B\rangle_{HS} \\
\langle A, B\rangle_{HS} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} A_{kl}\overline{B_{kl}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\overline{\overline{B_{kl}\overline{A_{kl}}}} = \overline{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} B_{kl}\overline{A_{kl}}} = \overline{\langle B, A\rangle_{HS}}
\end{aligned}$$

Damit ist (3) sesquilinear und hermitesch. Die positive Definitheit ist offensichtlich:

$$\langle A, A\rangle_{HS} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} A_{kl}\overline{A_{kl}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|A_{kl}|^2 \geq 0$$

Und es ist $\langle A, A\rangle_{HS} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|A_{kl}|^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Damit erfüllt (3) die Bedingungen eines komplexen Skalarprodukts. Mit

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|A_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle A, A\rangle_{HS}}$$

erkennt man, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS}$ gerade die Hilbert-Schmidt-Norm induziert. Diese ist damit in kanonischer Weise eine Norm. $\square$

Markus Oster (2444392, Bsc Physik)
Nicolai Lang (2439501, Bsc Physik)

Es gilt nun zu zeigen, dass $(\mathbb{C}^{m\times n}, \|\cdot\|)$ vollständig, also ein Banachraum ist und damit

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}_{\|\cdot\|}\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right) \Rightarrow \exists A \in \mathbb{C}^{m\times n} \,:\, A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} A$$

Schritt 1: *Konstruktion eines Kandidaten*
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}_{\|\cdot\|}(\mathbb{C}^{m\times n})$. Es folgt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq N_\varepsilon} \,:\, \sup_{x\neq 0}\frac{\|A_nx - A_mx\|_{\mathbb{C}^m}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} < \varepsilon \tag{4}$$

Betrachten wir ein beliebiges aber festes $x\in\mathbb{C}^n$. Ist $x=0$ so gilt $A_n0=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ woraus sofort $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}} A=0$ folgt. Ist hingegen $x\neq 0$ so folgt aus (4), dass $\|A_nx - A_mx\|_{\mathbb{C}^m} < \varepsilon\|x\|_{\mathbb{C}^n}$ für beliebiges $\varepsilon>0$ und alle $n,m\geq N_\varepsilon$. Damit ist $(A_nx)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}_{\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}}(\mathbb{C}^m)$ für jedes feste x. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{C}^m$ folgt dann die Existenz eines Grenzwertes $t_x\in\mathbb{C}^m$, sodass $A_nx \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}} t_x$.
Damit können wir den Operator $A \,:\, \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \,:\, x \mapsto Ax := t_x$ definieren. Dies ist der potentielle Grenzwert.

Schritt 2: *Nachweis der Linearität*
Es ist

$$\begin{aligned}A(\alpha x+\beta y) = t_{\alpha x+\beta y} &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty}(\alpha A_nx + \beta A_ny)\\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}A_nx + \beta\lim_{n\to\infty}A_ny\\ &= \alpha t_x + \beta t_y = \alpha Ax + \beta Ay\end{aligned}$$

Schritt 3: *Nachweis der Stetigkeit*
Mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CF}_{\|\cdot\|}(\mathbb{C}^{m\times n})$ folgt sofort $\|A_n\|\leq C$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt also $\forall_{x\in\mathbb{C}^n}$

$$\|A_nx\|_{\mathbb{C}^m} \leq C\|x\|_{\mathbb{C}^n}$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ folgt nach einem Grenzübergang $n\to\infty$

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}^m} = \left\|\lim_{n\to\infty}A_nx\right\|_{\mathbb{C}^m} = \lim_{n\to\infty}\|A_nx\|_{\mathbb{C}^m} \leq C\|x\|_{\mathbb{C}^n}$$

Und schließlich $\|A\|\leq C$. Damit ist $A\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ ein beschränkter und folglich stetiger, linearer Operator auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass dieser Homomorphismus von Vektorräumen unter Vorgabe von geigneten Basen eindeutig mit einer Matrix in $\mathbb{C}^{m\times n}$ identifiziert werden kann. Schließlich bleibt noch die Konvergenz bezüglich der $\|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)}$-Norm zu zeigen. Dies geschieht in

Schritt 4: *Nachweis der Konvergenz*
Aus (4) folgt, dass $\forall_{x\in\mathbb{C}^n} \,:\, \|A_nx - A_mx\|_{\mathbb{C}^m} < \varepsilon\|x\|_{\mathbb{C}^n}$ für genügend große n und m. Des Weiteren ist $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ stetig und es gilt $A_nx \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}} Ax$. Gehen wir in obiger Ungleichung zum Grenzwert in n über, so folgt

$$\begin{aligned}&\|Ax - A_mx\|_{\mathbb{C}^m} < \varepsilon\|x\|_{\mathbb{C}^n} \quad \forall_{x\in\mathbb{C}^n}\forall_{m\geq N_\varepsilon}\\ &\Leftrightarrow \frac{\|Ax - A_mx\|_{\mathbb{C}^m}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} < \varepsilon\\ &\Rightarrow \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax - A_mx\|_{\mathbb{C}^m}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} \leq \varepsilon < 2\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \|A - A_m\| < 2\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\end{aligned}$$

Daraus folgt $A_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|} A$, was den Beweis abschließt. $\square$

Folgende Ungleichungen sind zu beweisen:

$$\|A\| \leq \|A\|_{HS}, \quad \|A\|_{HS} \leq C_{n,m}\|A\|$$

Die Existenz von $C_{n,m}$ und damit die zweite Ungleichung folgen direkt aus der Äquivalenz von Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen (Beachte: $\dim \mathbb{C}^{m\times n} = mn < \infty$). $\square$

Im Hinblick auf die erste Ungleichung beachten wir, dass nach der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOWSKI für reelle oder komplexe Skalarprodukte gilt

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \tag{5}$$

Nun definiert $\langle x,y\rangle := \sum_{l=1}^n x_l\overline{y_l}$ bekanntermaßen ein komplexes Skalarprodukt. Auf Grund der Bijektivität des komplexen Konjugats gilt mit $z_l := \overline{y_l}$ folgende Ungleichung

$$\left|\sum_{l=1}^n x_l z_l\right|^2 = \left|\sum_{l=1}^n x_l\overline{y_l}\right|^2 \leq \sum_{l=1}^n |x_l|^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \sum_{l=1}^n |x_l|^2 \sum_{i=1}^n |\overline{z_i}|^2 = \sum_{l=1}^n |x_l|^2 \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \tag{6}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_{\mathbb{C}^m}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_{\mathbb{C}^m} = \sup_{\|x\|=1}\left[\sum_{k=1}^m\left|\sum_{l=1}^n A_{kl}x_l\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(6)}{\leq} \sup_{\|x\|=1}\left[\sum_{k=1}^m\left(\sum_{l=1}^n |A_{kl}|^2\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \underbrace{\sup_{\|x\|=1}\left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{=1}\left[\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n |A_{kl}|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|A\|_{HS}\end{aligned}$$

Damit sind alle linearen Operatoren auf endlichdimensionalen Räumen beschränkt und folglich stetig. $\square$

Es gilt nun zu zeigen, dass im Fall $m = n$ für die Eigenvektoren $\mathfrak{E} := \{\mathfrak{e}_1, ..., \mathfrak{e}_l\} \subseteq \mathbb{C}^n$ und die zugehörigen Eigenwerte $\Lambda := \{\lambda_{\mathfrak{e}_1}, ..., \lambda_{\mathfrak{e}_l}\} = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ der Matrix die Ungleichung

$$\|A\| \geq \max_k |\lambda_k|$$

gilt. Es ist

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} \geq \sup_{x\in\mathfrak{E}}\frac{\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} = \sup_{x\in\mathfrak{E}}\frac{\|\lambda_x x\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} = \sup_{x\in\mathfrak{E}}|\lambda_x| = \max_k |\lambda_k|$$

$\square$

Ein Beispiel für die echte Ungleichheit ergibt sich mit

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dann ist $Ab_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ und $\Lambda = \{1\}$. Es folgt

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} \geq \frac{\|\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^t\|_{\mathbb{C}^n}}{\|\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^t\|_{\mathbb{C}^n}} = \sqrt{5} > 1 = \max_k |\lambda_k|$$

b) Seien E, F, G Banachräume sowie $P \in \mathcal{L}(E, F)$ und $S \in \mathcal{L}(F, G)$ stetige (und damit beschränkte) lineare Operatoren. Sei $T = S \circ P$ die Komposition dieser Operatoren. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(\alpha v + \beta u) &= (S \circ P)(\alpha v + \beta u) = SP(\alpha v + \beta u) \\ &= S(\alpha P v + \beta P u) = \alpha SPv + \beta SPu \\ &= \alpha T v + \beta T u \end{aligned}$$

Damit ist T linear. Es folgt die Abschätzung mit $y = y(x) := Px$

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(E,G)} &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|SPx\|_G}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Sy\|_G}{\|x\|_E} \cdot \frac{\|Px\|_F}{\|y\|_F} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Sy\|_G}{\|y\|_F} \cdot \frac{\|Px\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leq \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Sy\|_G}{\|y\|_F} \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Px\|_F}{\|x\|_E} \\ &\leq \sup_{y \in F \setminus \{0\}} \frac{\|Sy\|_G}{\|y\|_F} \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Px\|_F}{\|x\|_E} = \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|P\|_{\mathcal{L}(E,F)} \end{aligned}$$

Nun ist aber $\|S\|_{\mathcal{L}(F,G)} \leq C_s$ und $\|P\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C_p$ woraus schließlich

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|P\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C_s C_p$$

folgt. Damit ist T beschränkt, linear und folglich stetig. Also $T \in \mathcal{L}(E, G)$. □

Ein Beispiel für die echte Ungleichheit ergibt sich wie folgt:
Sei $E = F = G = \mathbb{R}_1[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten a_k und $\deg p \leq 1$. Sei zudem auf $\mathbb{R}_1[x]$ die Koeffizientensummennorm $\|p\|_x := \sum_{k=0}^n |a_k|$ gegeben. Betrachten wir die offenbar linearen Operatoren $P : E \to F : p \mapsto p'$ und $S : F \to G : q \mapsto q'$. Es folgt mit $p(x) = ax + b$:

$$\|S\| = \|P\| = \sup_{p \in \mathbb{R}_1[x] \setminus \{0\}} \frac{\|a\|_x}{\|ax + b\|_x} = \sup_{p \in \mathbb{R}_1[x] \setminus \{0\}} \frac{|a|}{|a| + |b|} = 1$$

Damit ist $P \in \mathcal{L}(E, F)$ und $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Nun ist aber $T = SP : E \to G : p \mapsto p''$. Es folgt

$$\|T\| = \sup_{p \in \mathbb{R}_1[x] \setminus \{0\}} \frac{\|0\|_x}{\|ax + b\|_x} = 0 < \|S\| \|P\| = 1$$

Wobei immer $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\cdot,\cdot)}$ zu setzen ist.

Aufgabe 2

Wir definieren den Nabla-Operator ∇ formal zu

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^t$$

Seien weiterhin $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine vektorwertige (glatte) und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u &= \nabla \cdot u \quad \text{Divergenz} \\
\operatorname{grad} \phi &= \nabla \phi \quad \text{Gradient} \\
\operatorname{rot} u &= \nabla \times u \quad \text{Rotor} \\
\Delta \phi &= \nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \quad \text{Laplace-Operator}
\end{aligned}$$

Ist nun $\phi \in C^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ und $u \in C^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right)$ so folgt:

a)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi - \Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} u = \nabla \cdot [\nabla \times u] = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix} \\
&= \partial_x \partial_y u_z - \partial_x \partial_z u_y + \partial_y \partial_z u_x - \partial_y \partial_x u_z + \partial_z \partial_x u_y - \partial_z \partial_y u_x \\
&= \partial_x \partial_y u_z - \partial_x \partial_z u_y + \partial_y \partial_z u_x - \partial_x \partial_y u_z + \partial_x \partial_z u_y - \partial_y \partial_z u_x = 0
\end{aligned}$$