Lösungen

Arbeitsblatt I
zur Vorlesung Analysis 2 SS 2009

Markus Oster, Nicolai Lang

Tutor: *Christian Barth (Gruppe 4)*
Code: **0001111011**

25. Oktober 2009

Aufgabe 1.A

Im Folgenden sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen.

(a) *Die Aussage ist wahr.*
Es gilt zu zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \to \infty. \tag{1}$$

Beweis. Angenommen $\overline{a} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Mit

$$\overline{a} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\left[\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ \sqrt[n]{a_n} < \overline{a}+\varepsilon\right] \wedge \left[\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\ \sqrt[n_0]{a_{n_0}} > \overline{a}-\varepsilon\right] \tag{3}$$

(vgl. Arbeitsblatt II, Analysis 1 WS 08/09)
muss also $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\ \sqrt[n_0]{a_{n_0}} > \overline{a}-\varepsilon$ gelten. Wähle nun $q \in \mathbb{R}$, sodass $\overline{a} > q > 1$ und setze $\varepsilon := \overline{a}-q$. Damit ist $\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\ \sqrt[n_0]{a_{n_0}} > q > 1$ woraus mit $\sqrt[n_0]{a_{n_0}} > q > 1 \Rightarrow a_{n_0} > q^{n_0} > 1$ letztendlich $\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, a_{n_0} > 1$ und damit $a_n \nrightarrow 0$ für $n\to\infty$ folgt. Da $a_n \to 0$ für $n\to\infty$ notwenig für die Konvergenz der zugehörigen Reihe ist folgt die Behauptung. □

(b) *Die Aussage ist falsch.*
Es gilt zu zeigen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \tag{4}$$

Beweis. Setze z.B. $a_n := \left[(-1)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+1\right]^n$. Es ist offenbar $\underline{a} := \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ und $\overline{a} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{2} > 1$. Folglich lässt sich die in Aufgabenteil (a) bewiesene Aussage anwenden, wonach die entsprechende Reihe divergiert. Damit kann sie nicht konvergieren. □

Aufgabe 2.A

2.A.1

Im Folgenden sei $p \in \mathbb{R}^+$.

(a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4} \tag{5}$$

ist auf Konvergenz zu untersuchen.

Sei $b_n := \sin \frac{n\pi}{4}$ und $B_k := \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$. Es ergibt sich offenbar

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_4 = 0, \\ b_5 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_6 = -1, \quad b_7 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_8 = 0 \end{aligned}$$

Diese Sequenz wiederholt sich nun zyklisch, da $b_{n+8} = \sin \frac{(n+8)\pi}{4} = \sin\left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin \frac{n\pi}{4} = b_n$. Es gilt also für die Partialsumme B_k mit $m = 8q,\ q \in \mathbb{N}$

$$B_m = 0, \quad B_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B_{m+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \quad B_{m+3} = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1, \quad B_{m+4} = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1,$$

$$B_{m+5} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \quad B_{m+6} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B_{m+7} = 0, \quad B_{m+8} = 0$$

Damit ist B_m mit $0 \leq B_m \leq \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$ beschränkt. Mit $m \to \infty$ folgt die Beschränktheit der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Betrachten wir nun die Folge $a_n := \frac{\ln^{100} n}{n}$ und die Funktion $f(x) := \frac{\ln^{100} x}{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [1, \infty[$. Es ist offenbar $a_n = f(n)\, \forall_{n \in \mathbb{N}}$. Nun ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\ln^{99} x(100 - \ln x)}{x^2} < 0$$

für $x > N = e^{100}$. Es folgt $f(x) \downarrow$ für $x > N$ und mit $a_n = f(n)$ letztlich $a_n \downarrow$ für $n > N$. Des Weiteren ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{100 \ln^{99} x}{x} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{100! \ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{100!}{x} = 0$$

mit der Regel von L'Hospital. Es folgt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4} = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n b_n = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N} b_{n+N} \tag{6}$$

Wie oben gezeigt ist $|B_{n+N}| < M$ und $a_{n+N} \downarrow$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $a_{n+N} \to 0$ für $n \to \infty$. Die (bedingte) Konvergenz der zu untersuchenden Reihe folgt nun aus dem Satz von Dirichlet.

(b) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + p}\right) \tag{7}$$

ist in Abhängigkeit von $p > 0$ auf Konvergenz zu untersuchen.

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+p}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n + \pi\left[\sqrt{n^2+p}-n\right]\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(\pi n)\cos\left(\pi\left[\sqrt{n^2+p}-n\right]\right) + \cos(\pi n)\sin\left(\pi\left[\sqrt{n^2+p}-n\right]\right)\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\pi\left[\sqrt{n^2+p}-n\right]\right)\end{aligned}$$

Setzen wir $a_n := \left(\sqrt{n^2+p}-n\right)$ dann folgt

$$\begin{aligned}a_n = \left(\sqrt{n^2+p}-n\right) &= \frac{\left(\sqrt{n^2+p}-n\right)\left(\sqrt{n^2+p}+n\right)}{\sqrt{n^2+p}+n}\\ &= \frac{n^2+p-n^2}{\sqrt{n^2+p}+n} = \frac{p}{\sqrt{n^2+p}+n}\end{aligned}$$

Damit ist $a_n > 0$ und monoton fallend für $p > 0$. Des Weiteren ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wir wählen nun ein $N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $0 \leq \sin x \leq 1$ und $\sin x \uparrow$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Aus $a_{n+1} \leq a_n$ und der Monotonie des Sinus folgt schließlich $\sin \pi a_{n+1} \leq \sin \pi a_n$ für alle $n \geq N_{\frac{1}{2}}$. Aus der Stetigkeit des Sinus folgt sofort $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi a_n) = 0$. Damit konvergiert die Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+p}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\pi\left[\sqrt{n^2+p}-n\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\pi a_n)\\ &= \sum_{n=1}^{N_{\frac{1}{2}}}(-1)^n \sin(\pi a_n) + \sum_{n=N_{\frac{1}{2}}+1}^{\infty}(-1)^n \sin(\pi a_n)\end{aligned}$$

nach dem Satz von Leibniz für $p > 0$ bedingt.

(c) Das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \sin(x^p)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

ist auf Konvergenz in Abhängigkeit von $p \in \mathbb{R}^+$ zu untersuchen.

Substitution mit $x^p = y \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}y$ ergibt

$$\int\limits_1^\infty \sin(x^p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int\limits_1^\infty \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y$$

Fall 1: Sei $p > 1$.
Dann ist $y^{\frac{1}{p}-1} \downarrow$ monoton fallend, differenzierbar sowie $y^{\frac{1}{p}-1} \longrightarrow 0$ für $y \longrightarrow \infty$. Des Weiteren ist die Stammfunktion $|\cos y| \leq 1$ von $\sin y$ beschränkt für $y \in [1, \infty[$. Dann gilt nach dem 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $\xi \in [a, b]$

$$\left|\int\limits_a^b \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y\right| = \left|a^{\frac{1}{p}-1}\int\limits_a^\xi \sin y \mathrm{d}y\right| = a^{\frac{1}{p}-1}\left|\int\limits_a^\xi \sin y \mathrm{d}y\right| \leq a^{\frac{1}{p}-1}C \leq \varepsilon$$

für alle $a, b > R$ und hinreichend großes $R \geq 1$. Damit ist aber das Konvergenzkriterium von Cauchy für das Integral

$$\frac{1}{p}\lim_{S\to\infty}\int\limits_1^S \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y = \int\limits_1^\infty \sin(x^p)\,\mathrm{d}x$$

erfüllt. Das Integral konvergiert also bedingt für $p > 1$. (N.B. Diese Argumentation entspricht im Grunde dem Konvergenzkriterium von Dirichlet für uneigentliche Integrale).

Fall 2: Sei $p = 1$.
Dann ist

$$\int\limits_1^\infty \sin(x^p)\,\mathrm{d}x = -\cos x|_1^\infty$$

Dieses Integral besitzt offenbar keinen Grenzwert. Daher divergiert das besagte Integral für $p = 1$.

Fall 3: Sei $p < 1$.
Dann ist $y^{\frac{1}{p}-1} \uparrow$ monoton wachsend, differenzierbar sowie $y^{\frac{1}{p}-1} \longrightarrow \infty$ für $y \longrightarrow \infty$. Des Weiteren ist die Stammfunktion $|\cos y| \leq 1$ von $\sin y$ beschränkt für $y \in [1, \infty[$. Wir untersuchen das Integral mit dem Kriterium von Cauchy auf Divergenz. Wähle hierfür ein beliebiges $R \geq 1$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\pi(2k+1) \geq \pi 2k \geq R$ für alle $k \geq k_0$. Betrachte nun das Integral

$$\left|\int\limits_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y\right|$$

Auf dem Integrationsintervall $[\pi 2k, \pi(2k+1)]$ ist $\sin y \geq 0$. Daher folgt aus dem 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein bestimmtes $\xi \in [\pi 2k, \pi(2k+1)]$

$$\left| \int\limits_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} \sin y \cdot y^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}y \right| = \xi^{\frac{1}{p}-1} \left| \int\limits_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} \sin y \mathrm{d}y \right| = \xi^{\frac{1}{p}-1} \left| - \cos y|_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} \right| = 2\xi^{\frac{1}{p}-1}$$

Wegen $\frac{1}{p} - 1 > 0$ und $\xi \geq \pi 2k$ folgt $2\xi^{\frac{1}{p}-1} \to \infty$ für $k \to \infty$. Damit ist aber das Konvergenzkriterium von Cauchy nicht erfüllbar. Das Integral divergiert also für $p < 1$.

2.A.2

Die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \tag{9}$$

ist auf Konvergenz zu untersuchen.

Sei $a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!(2n+2)!!(2n+3)}{(2n)!!(2n+1)!!(2n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} = \frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}$$

Es folgt

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) = n\frac{6n+5}{4n^2+4n+1} = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}$$

Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$. Damit existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $R_n \geq r$ für alle $n \geq N$ und $\frac{3}{2} > r > 1$. Es folgt die Konvergenz der Reihe nach dem Raabschen Kriterium.

Aufgabe 3.A

Im Folgenden sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen und $A := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die zugehörige Reihe.

3.A.1

Satz 1: [BERTRANDSCHES KRITERIUM]
Sei

$$B_n := \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \tag{10}$$

$$B := \lim_{n \to \infty} B_n, \quad B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{11}$$

Dann ist die Reihe A für $B > 1$ konvergent, für $B < 1$ divergent.

Beweis. Sei $c_n := n \ln n$ mit $n \geq 2$. Die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergiert auf Grund des INTEGRALKRITERIUMS. Tatsächlich: Setzen wir $f(x) := \frac{1}{x \ln x}$, so gilt $\frac{1}{c_n} = f(n)$, sowie $f(x) \downarrow$ und $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ und $x \geq 2$. Des Weiteren ist

$$\int\limits_2^R \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \int\limits_2^R \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x}{\ln x} \mathrm{d}x = \ln \ln R - \ln \ln 2 \xrightarrow{R \to +\infty} +\infty$$

Setze nun

$$\begin{aligned}
K_n := c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1) \\
&= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \ln (n+1) - \ln (n+1) \\
&= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln n \right] - \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln n \right] \\
&= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - n \ln n - \ln n \\
&= \ln n \left[n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \\
&= \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \\
&= B_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit des Logarithmus und dem bekannten Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ folgt für $n \to \infty$

$$K = B - \ln e = B - 1 \tag{12}$$

Wobei $K, B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und $K := \lim\limits_{n \to \infty} K_n$. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt nun nach Konstruktion die Bedingungen des KUMMERSCHEN KRITERIUMS. Aus letzterem Folgt die Konvergenz von A falls $K > 0 \Leftrightarrow B > 1$ sowie die Divergenz von A für $K < 0 \Leftrightarrow B < 1$. $\square$

Satz 2: [GAUSSSCHES KRITERIUM]
Lässt sich der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ darstellen als

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\Theta_n}{n^2} \tag{13}$$

wobei λ und μ konstant sind und $|\Theta_n| < M$ beschränkt ist. Ist $(\lambda > 1) \vee (\lambda = 1 \wedge \mu > 1)$ so konvergiert A. Ist hingegen $(\lambda < 1) \vee (\lambda = 1 \wedge \mu \leq 1)$ so divergiert sie.

Beweis.
Fall 1: Sei $\lambda > 1$. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wähle nun ein $q \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{\lambda} < q < 1$ und setze $\varepsilon := q - \frac{1}{\lambda}$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \forall_{n \geq N}$. Aus dem QUOTIENTENKRITERIUM folgt nun die Konvergenz der Reihe.
Fall 2: Sei $\lambda < 1$. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{\lambda} - \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wähle nun ein $q \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{\lambda} > q > 1$ und setze $\varepsilon := \frac{1}{\lambda} - q$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \quad \forall_{n \geq N}$. Aus dem QUOTIENTENKRITERIUM folgt nun die Divergenz der Reihe.
Fall 3: Sei $\lambda = 1$ und $\mu < 1$ bzw. $\mu > 1$. Nun ist $R_k := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda\right) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\Theta_n}{n}$. Gehen wir mit $n \to \infty$ zum Grenzwert über, so erhalten wir mit $R := \lim\limits_{n\to\infty} R_k$ wegen der Beschränktheit von Θ_n:

$$R = \mu \tag{14}$$

Mit der selben Argumentation bzgl. der Grenzwerte wie in Fall 1 und 2 folgt mit $R = \mu < 1$ die Divergenz aus dem RAABSCHEN KRITERIUM. Für $R = \mu > 1$ folgt analog die Konvergenz.
Fall 4: Sei $\lambda = \mu = 1$. Wir setzen $B_n := \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda\right) - \mu\right] = \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \frac{\Theta_n \ln n}{n}$. Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ und $|\Theta_n| < M$ folgt $B := \lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0 < 1$. Nach SATZ 1 divergiert die Reihe. □

3.A.2

(a) Sei $p, q \in \mathbb{R}^+$. Die Folgende Reihe ist auf Konvergenz zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)...(q+n)} \tag{15}$$

Es ergibt sich mit $a_n := \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)...(q+n)}$

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!n^{-p}q(q+1)...(q+n)(q+n+1)}{(n+1)!(n+1)^{-p}q(q+1)...(q+n)} = \frac{n^{-p}(q+n+1)}{(n+1)(n+1)^{-p}} \\ &= \frac{n^{-p}(q+n+1)}{(n+1)(n+1)^{-p}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}\frac{1+q+n}{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}\left(1+\frac{1+q}{n}\right)\end{aligned}$$

Sei nun $x := \frac{1}{n}$ und $f(x) := (1+x)^{p-1}(1+(1+q)x)$. Entwickeln wir f an der Stelle $x_0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ in eine Taylorreihe 2. Ordnung, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= (p-1)(1+x)^{p-2}(1+(1+q)x) + (1+x)^{p-1}(1+q) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) &= (p-1)\left[(p-2)(1+x)^{p-3}(1+(1+q)x) + (1+x)^{p-2}(1+q)\right] \\ &\quad +(1+x)^{p-2}(p-1)(1+q)\end{aligned}$$

Und schließlich

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\bigg|_{x=0} x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\bigg|_{x=0} x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + (p+q)x + \frac{(p-1)(p+2q)}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Setzen wir nun wieder $x = \frac{1}{n}$ ein und beachten, dass mit $o(x^2) = o(\frac{1}{n^2})$ für $n \to \infty$ letztendlich $o(\frac{1}{n^2})n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt und damit $\left|o(\frac{1}{n^2})n^2\right| < C$ beschränkt ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= 1 + \frac{p+q}{n} + \frac{(p-1)(p+2q) + 2o(\frac{1}{n^2})n^2}{2n^2} \\ &= 1 + \frac{p+q}{n} + \frac{\Theta_n}{n^2}\end{aligned}$$

Damit folgt aus dem Gaussschem Kriterium für $\lambda = 1$ und $\mu = p+q > 1$ die Konvergenz der Reihe sowie die Divergenz für $\mu = p+q \leq 1$.

(b) Sei $p \in \mathbb{R}$. Die Folgende Reihe ist auf Konvergenz zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p} \tag{16}$$

Wir setzen $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$. Es ist offenbar $a_n = f(n)$ mit $a_n := \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$. f ist stetig und positiv $\forall_{x\geq 3}$. Des Weiteren ist $f \downarrow$ für $p > 0$. Es ist

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \frac{xe^x(\ln x)(\ln\ln x)^p}{xe^x \ln^p x} = \frac{(\ln\ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} \tag{17}$$

Fall 1: Sei $p < 0$. Die Reihe genügt offenbar der Abschätzung

$$\sum_{n=\lceil e^e \rceil}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^p}$$

da für $n \geq \lceil e^e \rceil$ $\ln \ln n \geq 1$ gilt. Die **Divergenz** der Reihe für $p < 0$ folgt nun aus der Divergenz der Reihe für $p = 0$. Der Beweis hierzu folgt in
Fall 2: Sei $p = 0$. Es ist also:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{1}{(\ln x)^{-1}} = \ln x \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

Aus dem Ermakoffschen Kriterium folgt die **Divergenz** der Reihe.
Fall 3: Sei $0 < p < 1$. Unter Beachtung von $p > 0$ und $p - 1 < 0$ ergibt sich:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

Aus dem Ermakoffschen Kriterium folgt die **Divergenz** der Reihe.
Fall 4: Sei $p = 1$. Es ist also:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^1}{(\ln x)^{1-1}} = \ln \ln x \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

Aus dem Ermakoffschen Kriterium folgt die **Divergenz** der Reihe.
Fall 5: Sei $p > 1$. Mit $p > 0$, $p - 1 > 0$ und der Regel von L'Hospital ergibt sich $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln \ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} = \frac{p}{p-1} \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\ln \ln x}{\ln x}\right)^{p-1} = 0$ Es ist also:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 < 1$$

Aus dem Ermakoffschen Kriterium folgt nun die **Konvergenz** der Reihe.

Dabei wurde mehrfach die Regel von L'Hospital angewandt.

Aufgabe 4

4.1

Es ist zu zeigen, dass für $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \tag{18}$$

gilt. Der Einfachheit halber setzen wir $y := \frac{x}{2}$ und folglich $y \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Es gilt also zu zeigen, dass

$$\hat{f}_n(y) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2ky = \frac{\sin(2n+1)y}{2 \sin y}$$

Wir führen eine Induktion über n.

(1) *Induktionsanfang*
Es folgt offenbar für $n = 1$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n(1) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{1} \cos 2ky = \frac{1}{2} + \cos 2y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) + \frac{1}{2}\cos 2y \\
&= \cos^2 y + \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{2\sin y \cos y \cos y}{2\sin y} + \frac{1}{2}\cos 2y \\
&= \frac{\sin 2y \cos y}{2\sin y} + \frac{\sin y \cos 2y}{2\sin y} = \frac{\sin 3y}{2\sin y} = \frac{\sin(2\cdot 1 + 1)y}{2\sin y}
\end{aligned}$$

(2) *Induktionsschritt*
Es gelte $\hat{f}_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2ky = \frac{\sin(2n+1)y}{2\sin y}$ für gewisse $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{n+1}(y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \cos 2ky = \hat{f}_n(y) + \cos\left[2(n+1)y\right] \\
&= \frac{\sin(2n+1)y}{2\sin y} + \cos\left[2(n+1)y\right] \\
&= \frac{\sin(2n+1)y + 2\sin y \cos\left[2(n+1)y\right]}{2\sin y} \\
&= \frac{\sin(2n+1)y + \sin\left[-(2n+1)y\right] + \sin\left[(2n+3)y\right]}{2\sin y} \\
&= \frac{\sin\left[(2n+3)y\right]}{2\sin y} = \frac{\sin\left[(2(n+1)+1)y\right]}{2\sin y}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Der Nachweis von (18) lässt sich allerdings noch kürzer unter Ausnutzung einer Teleskopsumme erbringen. Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(2n+1)y - \sin y &= \sum_{k=1}^{n} \left[\sin(2k+1)y - \sin(2k-1)y\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\sin(2ky + y) + \sin(y - 2ky)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\sin y \cos 2ky
\end{aligned}$$

Dividiert man noch durch $2\sin y$ und bringt $\frac{1}{2}$ auf die andere Seite, erhält man (18).

4.2

Es gilt zu zeigen, dass

$$I_n := \int_0^\pi x f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \tag{19}$$

Mit $f_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi x\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x\cos kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2}
\end{aligned}$$

□

Für I_{2n-1} ergibt sich unter Beachtung von $(-1)^{2q} - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
I_{2n-1} &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{q=1}^n \frac{(-1)^{2q-1} - 1}{(2q-1)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{q=1}^n \frac{1}{(2q-1)^2}
\end{aligned}$$

4.3

Sei

$$u(x) := \begin{cases} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Es ist zu zeigen, dass $0 < u'(x) \leq \frac{1}{2}$ für $0 < x \leq \pi$ gilt.

Für die totale Ableitung folgt mit $y := \frac{x}{2}$ und $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) = \frac{\sin y - y\cos y}{2\sin^2 y}$$

(a) *Zu zeigen*: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) > 0$ für $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$. Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin y - y\cos y}{2\sin^2 y} > 0 \Leftrightarrow \sin y - y\cos y > 0 \Leftrightarrow \tan y > y$$

Sei nun $y \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Dann folgt aus dem Satz von Lagrange mit bestimmtem $\xi \in]0, y[$

$$\tan y = |\tan y - \tan 0| = \frac{1}{\cos^2\xi}(y-0) > y$$

Die strikte Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass $\xi \neq 0$.

(b) *Zu zeigen*: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) \leq \frac{1}{2}$ für $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$. Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin y - y\cos y}{2\sin^2 y} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y - y\cos y \leq \sin^2 y$$

Nun folgt unter Beachtung von $\cos y \geq 0$ sowie $y \geq \sin y \geq 0$ für $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin y - y\cos y &\leq \sin y - \sin y\cos y = \sin y(1-\cos y) \\ &= \sin y\frac{1-\cos^2 y}{1+\cos y} = \frac{\sin y}{1+\cos y}\sin^2 y \\ &\leq \sin^2 y \end{aligned}$$

□

4.4

Es ist zu zeigen, dass

$$I_{2n-1} = \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\int_0^\pi u'(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\mathrm{d}x\right] \tag{21}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\pi u'(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\mathrm{d}x &= u(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\bigg|_0^\pi + \frac{4n-1}{2}\int_0^\pi \frac{x}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(4n-1)x}{2}\mathrm{d}x\\ &= (0-1)+\frac{4n-1}{2}\int_0^\pi x\frac{\sin\frac{(4n-1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\ &= -1+\frac{4n-1}{2}\int_0^\pi x f_{2n-1}\mathrm{d}x\\ &= -1+\frac{4n-1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right]\\ &= -1+\frac{4n-1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4}-2\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{(2q-1)^2}\right]\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (21) ein, so folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4n-1}\left[2+2\left(-1+\frac{4n-1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4}-2\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{(2q-1)^2}\right]\right)\right]\\ &=\frac{\pi^2}{4}-2\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{(2q-1)^2}=I_{2n-1}\end{aligned}$$

□

4.5

Es ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$. Nun lässt sich $|I_{2n-1}|$ wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
0 &\le |I_{2n-1}| \\
&= \frac{1}{4n-1}\left|2 + 2\int\limits_0^\pi u'(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\mathrm{d}x\right| \\
&\le \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\left|\int\limits_0^\pi u'(x)\cos\frac{(4n-1)x}{2}\mathrm{d}x\right|\right] \\
&\overset{4.3}{\le} \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\int\limits_0^\pi u'(x)\left|\cos\frac{(4n-1)x}{2}\right|\mathrm{d}x\right] \\
&\le \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\int\limits_0^\pi u'(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\, u(x)|_0^\pi\right] \\
&= \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{4n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(2q-1)^2} = 0$$

Und schließlich

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(2q-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \tag{22}$$

4.6

Es ist offenbar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \tag{23}$$

Daraus ergibt sich sofort $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und schließlich $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{24}$$

□

Aufgabe 5.B

5.1

Satz 3: [Vertauschen von Reihen]
Sei $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge mit $a_{n,m} \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty \tag{25}$$

Dann konvergiert die Doppelreihe $\sum\limits_{n,m} a_{n,m}$ und es gilt

$$\sum_{n,m} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \tag{26}$$

Beweis.
Schritt 1: (Existenz der Grenzwerte)
Aus (25) folgt sofort die absolute Konvergenz von $A_n := \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ und $B_m := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$. Des Weiteren ist $A_n \leq |A_n| \leq |A|_n$ und $B_m \leq |B_n| \leq |B|_m$, wobei $|A|_n := \sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}|$ und $|B|_m := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}|$. Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A|_n$ folgt dann die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$ und schließlich die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Analoges folgt für B_m.
Schritt 2: (Gleichheit der Grenzwerte)
Sei $S_{N,M} := \sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} a_{n,m} = \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N} a_{n,m}$. Es ist also zu zeigen, dass

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty} S_{N,M} = \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty} S_{N,M} \tag{27}$$

Aus Schritt 1 wissen wir, dass jeder dieser Grenzwerte für sich existiert. Es genügt also zu zeigen, dass einer dieser Grenzwerte gleichmäßig bezüglich des korrespondierenden Parameters angenommen wird. Tatsächlich, ist $A_n(M) := \sum\limits_{m=1}^{M} a_{n,m}$, so gilt

$$|A_n(M)| = \left|\sum_{m=1}^{M} a_{n,m}\right| \leq \sum_{m=1}^{M} |a_{n,m}| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| = |A|_n < \infty \tag{28}$$

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A|_n$ folgt dann nach dem Majorantenkriterium von Weierstrass die gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(M) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N} A_n(M) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} a_{n,m} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{N,M}$ bzgl. $M \in \mathbb{N}$. Dies schließt den Beweis ab. □

5.B.2

Es ist folgende Identität zu beweisen

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8} \tag{29}$$

Wir benutzen in Folgenden die Identität $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. Die Konvergenz dieser Reihenentwicklung des $\arctan x$ wird weiter unten bewiesen. Unter Beachtung von $\frac{1}{(4n-2)^2} < 1 \, \forall_{n\in\mathbb{N}}$ und Anwendung der Summationsformel für die Geometrische Reihe folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(4n-2)^2}\right]^m \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{(4n-2)^2}} - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^2-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(4n-2)-1]\,[(4n-2)+1]} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

□

Lemma: Es gilt die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \tag{30}$$

Beweis. Wie in Aufgabe 6.B (a) gezeigt wird, konvergiert die Reihenentwicklung des $\arctan x$

$$T_{\arctan}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

für alle $x \in \,]-1,1[$. Setzen wir $x = 1$, so ergibt sich

$$T_{\arctan}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Konvergenzkriterium von Leibnitz. Da $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und $T_{\arctan}(1)$ offensichtlich der Reihe (30) entspricht, genügt es zu zeigen, dass $T_{\arctan}(x) = \arctan x$ für $x \in [-1,1]$.

Um die Konvergenz der Taylorentwicklung gegen $\arctan x$ zu zeigen, reicht es folgende Konvergenz des Restgliedes für $x \in [-1,1]$ zu verifizieren

$$r_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Für die n-te Ableitung des Arkustangens ergibt sich (Beweis siehe unten)

$$\arctan^{(n)} x = (n-1)! \cos^n [\arctan x] \cdot \sin \left[n \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) \right] \tag{31}$$

Dann gilt für die Restgliedabschätzung unter Beachtung von $x \in [-1,1]$ und $\xi_x \in [0,x]$ bzw. $\xi_x \in [x,0]$

$$\begin{aligned}
|r_n(x)| &= \left| f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\
&= \left| \frac{n! \cos^{n+1} [\arctan(\xi_x)] \cdot \sin \left[(n+1) \left(\arctan(\xi_x) + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\
&\leq \left| \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Es folgt noch die Herleitung der Expliziten Formel für die n-te Ableitung des $\arctan x$. Sei $y := \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$. Es ist also zu zeigen, dass

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \tag{32}$$

(1) *Induktionsanfang*
Es ist $y^{(1)} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)^2} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = (1-1)! \cos^1 y \cdot \sin\left[1\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]$.

(2) *Induktionsschritt*
Es gelte (32) für gewisse $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (n-1)! \cos^n y \cdot \sin \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
&= (n-1)! \left[-ny' \cos^{n-1} y \cdot \sin y \cdot \sin \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] + ny' \cos^n y \cdot \cos \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \\
&= n! \left[\cos y \cdot \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos^n y \cdot \cos \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \cos y \cdot \cos^{n-1} y \cdot \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin y \cdot \sin \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \\
&= n! \cos^{n+1} y \cdot \left[\sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \sin y \sin \left[n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \\
&= n! \cos^{n+1} y \cdot \cos \left(y + ny + n\frac{\pi}{2} \right) \\
&= n! \cos^{n+1} y \cdot \cos \left[(n+1) \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\
&= n! \cos^{n+1} y \cdot \sin \left[(n+1) \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$\square$

Damit ist der Beweis des Lemmas abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 6.B

(a) Der Konvergenzradius R der Taylorentwicklung $T_{\cos}(x)$ der Funktion $\cos x$ ist zu bestimmen.

Es ist

$$T_{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{33}$$

Nach dem Wurzelkriterium muss gelten

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right|^{\frac{1}{n}} x^2 < 1 \\
\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right|^{\frac{1}{n}}} \\
\Leftrightarrow x < \frac{1}{\left(\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}}} =: R
\end{aligned}$$

Es ist offenbar $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} = 0$. Damit ist $R = +\infty$.

(b) Der Konvergenzradius R der Taylorentwicklung $T_{\arctan}(x)$ der Funktion $\arctan x$ ist zu bestimmen.

Es ist

$$T_{\arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \tag{34}$$

Unter Beachtung von $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ muss nach dem Wurzelkriterium gelten

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}} \frac{x^2}{\sqrt[n]{x}} < 1 \\
\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}\sqrt[n]{x}}} \\
\Leftrightarrow x < \frac{1}{\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}\sqrt[n]{x}} \right)^{\frac{1}{2}}} =: R
\end{aligned}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}\sqrt[n]{x}} = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt schließlich $R = 1$. Für $x = 0$ ist die Konvergenz trivial. Dabei wurde die Abschätzung $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{2n-n} \leq \sqrt[n]{2n-1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}$ und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = 1$ verwendet.

Aufgabe 7.B

7.1

Satz 4: [Satz von Abel, Regularität der PA-Summation]
Die Potenzreihenmethode ist regulär. Ist also $A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent im üblichen Sinne, so konvergiert auch die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{35}$$

für $0 < x < 1$ und es ist $\lim\limits_{x\to 1-0} P(x) = A$.

Beweis. Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ sowie der Monotonie und Beschränktheit der Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k := x^k$ für festes $0 < x < 1$ folgt nach dem Konvergenzkriterium von Abel die bedingte Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Wir definieren die Partialsumme $A_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^{n+1} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt mit $0 < x < 1$ nach der Summationsformel der Geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A x^n = A \tag{36}$$

Subtrahieren wir von (36) die Identität $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, so folgt

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (A - A_n)\, x^n$$

Mit $\alpha_n := A - A_n$ vereinfacht zu

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \tag{37}$$

wobei die Konvergenz der Partialsumme A_n gegen A die Konvergenz $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ impliziert. Also $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1}} : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt lässt sich $|A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n|$ folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned}
\left|A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| &= \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right| \\
&= \left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n\right| \\
&\leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n\right| + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|\, x^n \\
&\leq (1-x)C + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \\
&\leq (1-x)C + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(1-x)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dies gilt für genügend große $n \in \mathbb{N}$ (N.B. Die linke Seite hängt von n nicht ab!) und hinreichend nahe an 1 liegende $x \in [0, 1]$. $\square$

7.B.2

Die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \tag{38}$$

für $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ ist auf Konvergenz bzgl. Poisson-Abel bzw. Cesàro zu untersuchen.

Um die Reihe auf Konvergenz bzgl. Cesàro untersuchen zu können, benötigen wir einen expliziten Ausdruck für die Partialsummen

$$S_m(\theta) := \sum_{n=1}^{m} \sin n\theta$$

Wir erlangen die Summationsformel analog zu Aufgabe 4.1. Es ist

$$\begin{aligned}\cos y - \cos(2n+1)y &= \sum_{k=1}^{n} [\cos(2k-1)y - \cos(2k+1)y] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} [\cos(2k-1)y - \cos(2k+1)y] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \sin 2ky \sin y\end{aligned}$$

Dividiert man durch $2\sin y$ und setzt $y := \frac{\theta}{2}$ erhält man

$$S_m(\theta) = \sum_{n=1}^{m} \sin n\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2m+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \tag{39}$$

Sei nun

$$C_l(\theta) := \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l} S_m(\theta) \tag{40}$$

Dann gilt (mit der Identität aus Aufgabe 4.1)

$$\begin{aligned}C_l(\theta) &= \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l} S_m(\theta) = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l} \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2m+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{l\cos\frac{\theta}{2}}{2l\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2l\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{m=1}^{l} \cos\frac{(2m+1)\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2l\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{m=1}^{l}\left[\cos m\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin m\theta\sin\frac{\theta}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l}\sum_{m=1}^{l}\cos m\theta + \frac{1}{2l}\sum_{m=1}^{l}\sin m\theta \\ &= \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{2l}\,\frac{\sin\frac{(2l+1)\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2l}\,\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2l+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} + \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \left[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{(2l+1)\theta}{2} + \sin\frac{(2l+1)\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]}{4l\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta - \sin(l+1)\theta}{4l\sin^2\frac{\theta}{2}} \xrightarrow{l\to\infty} \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als verallgemeinerte Summe nach Cesàro $C(\theta) = \lim\limits_{l\to\infty} C_l(\theta) = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$. Nach dem Satz von Frobenius ist die Reihe dann auch Poisson-Abel-summierbar und besitzt den selben Grenzwert.

Aufgabe 8.A

8.A.1

Es gelte $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ und

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \tag{41}$$

Wegen $|a_k \sin(kx)| \leq |a_k|$ konvergiert (41) gleichmäßig bzgl. $x \in \mathbb{R}$. Auf Grund der Stetigkeit von $\sin x$ auf $\mathbb{R}$ ist $f(x)$ ebenfalls stetig. Es ist zu zeigen, dass

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x \tag{42}$$

Setzen wir (41) in (42) ein und bedenken die gleichmäßige Konvergenz der Reihe bzgl. $x \in \mathbb{R}$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(ix)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(ix)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(k-i)x - \cos(i+k)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[\int_0^{2\pi}\cos(k-i)x\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi}\cos(i+k)x\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} a_i \left[\int_0^{2\pi}\cos(k-i)x\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi}\cos(i+k)x\mathrm{d}x\right] + R_k \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} a_i \left[\frac{1}{k-i}\int_0^{2\pi(k-i)}\cos y\mathrm{d}y - \frac{1}{i+k}\int_0^{2\pi(i+k)}\cos y\mathrm{d}y\right] + R_k \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} a_i \left[\frac{1}{k-i}\cdot 0 - \frac{1}{i+k}\cdot 0\right] + R_k = R_k
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
R_k &= \frac{1}{2\pi}a_k\left[\int_0^{2\pi}\cos(k-k)x\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi}\cos(k+k)x\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}a_k\left[2\pi - \frac{1}{2k}\int_0^{4k\pi}\cos y\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}a_k\left[2\pi - \frac{1}{2k}\cdot 0\right] = a_k
\end{aligned}$$

□

Alternativ *(umgekehrte Richtung):*
Es ist

$$f(x)\sin(mx) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)\sin(mx) \tag{43}$$

Wegen $|a_k \sin(kx)\sin(mx)| \leq |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ dürfen wir Integral und Reihe vertauschen. Es ist also

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)\sin(mx)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} a_k \left[\frac{1}{n-m}\int\limits_0^{2\pi(n-m)} \cos y \mathrm{d}y - \frac{1}{n+m}\int\limits_0^{2\pi(n+m)} \cos y \mathrm{d}y\right] + R_m \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} a_k \left[\frac{1}{n-m}\sin y|_0^{2\pi(n-m)} - \frac{1}{n+m}\sin y|_0^{2\pi(n+m)}\right] + R_m \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} a_k \left[0-0\right] + R_m = R_m
\end{aligned}$$

Wobei

$$\begin{aligned}
R_m &= \frac{1}{2}a_m \left[\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}x - \int\limits_0^{2\pi} \cos(2mx)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}a_m \left[2\pi - \frac{1}{2m}\int\limits_0^{4m\pi} \cos y \mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2}a_m \left[2\pi - \frac{1}{2m}\sin y|_0^{4m\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2}a_m \left[2\pi - 0\right] = a_m\pi
\end{aligned}$$

Es folgt schließlich

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\mathrm{d}x$$

$\square$

8.A.2

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}|a_k| < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|a_k \sin(kx)| \leq |a_k| \leq k^{2n}|a_k|$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \tag{44}$$

gleichmäßig bzgl. $x \in \mathbb{R}$, ist also wohldefiniert und zudem stetig. Nun ist offenbar

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k \sin(kx)\right| = |k a_k \cos(kx)| \leq k|a_k| \leq k^{2n}|a_k|$$

Damit ist aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k \sin(kx)$ gleichmäßig konvergent bzgl. $x \in \mathbb{R}$, woraus

$$f^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cos(kx)$$

folgt. Dieses Vorgehen lässt sich nun iterativ fortsetzen, bis

$$f^{(2n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} a_k (-1)^{n-1} \cos(kx)$$

Nun lässt sich obige Abschätzung das letzte mal anwenden

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} k^{2n-1} a_k (-1)^{n-1} \cos(kx)\right| = \left|k^{2n} a_k (-1)^n \sin(kx)\right| \leq k^{2n}|a_k|$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} a_k (-1)^{n-1}\cos(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} k^{2n-1} a_k (-1)^{n-1} \cos(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} a_k (-1)^n \sin(kx) \end{aligned}$$

Wegen $\left|k^{2n} a_k (-1)^n \sin(kx)\right| \leq k^{2n}|a_k|$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig bzgl. $x \in \mathbb{R}$. Auf Grund der Stetigkeit von $\sin x$ ist damit auch $f^{(2n)}(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Es ist also $f \in C^{2n}(\mathbb{R})$. Die Koeffizienten b_k ergeben sich offensichtlich zu $b_k = k^{2n} a_k (-1)^n$.

Aufgabe 9.B

Die folgende Reihendarstellung ist zu beweisen

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}} \tag{45}$$

Substituieren wir das Integral mit $y = \frac{2}{x} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\mathrm{d}y$, so ergibt sich

$$\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = -\int\limits_1^0 \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{y}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{y}\right)^3}\mathrm{d}y = 2\int\limits_0^1 \frac{y}{8+y^3}\mathrm{d}y$$

Die Taylorentwicklung von $\frac{y}{8+y^3}$ ergibt sich zu

$$T(y) = \frac{y}{8} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^7}{512} - \frac{y^{10}}{4096} + \frac{y^{13}}{32768} - \frac{y^{16}}{262144}...$$

In expliziter Schreibweise

$$\frac{y}{8+y^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{3n+1}}{2^{3n+3}} \tag{46}$$

Der Konvergenzradius R dieser Reihenentwicklung beträgt nach Hadamard-Cauchy

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^{3n+3}}\right|^{\frac{1}{3n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Damit konvergiert (46) gleichmäßig bzgl. $x \in]-2, 2[$ und wir können eigentliches Integral und Reihe vertauschen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} &= 2\int\limits_0^1 \frac{y}{8+y^3}\mathrm{d}y = 2\int\limits_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{3n+1}}{2^{3n+3}}\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+2}} \int\limits_0^1 y^{3n+1}\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}} \left[y^{3n+2}\right]_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.B

Sei B die Betafunktion. Es ist zu zeigen, dass

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right) \tag{47}$$

gilt.

Es ergibt sich unter Beachtung der Symmetrie des Integranden um den Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}B(a,a) &= \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Substituieren wir mit $\frac{1}{2}-x = \frac{\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow (1-2x)^2 = y$, so folgt

$$\begin{aligned}B(a,a) &= 2\int\limits_1^0 \left(\frac{1}{4}-\frac{y}{4}\right)^{a-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\mathrm{d}y \\ &= 2\cdot 4^{1-a}\cdot 2^{-2}\int\limits_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{a-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right)\end{aligned}$$

Satz 5: [LEGENDRESCHER VERDOPPLUNGSSATZ]
Sei Γ die Gammafunktion. Dann gilt folgende Identität:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \tag{48}$$

Beweis. Es gilt

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{49}$$

Aus (47) und (49) folgt

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right) = \frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}$$

Mit der Ergänzungsformel erhält man $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und schließlich

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$$

□