Lösungen zum

Arbeitsblatt III zur Vorlesung Analysis 1 WS 2008/09

Marc Sartison, Nicolai Lang, Armin Krauß
Code: **0001111011**

30. Mai 2009

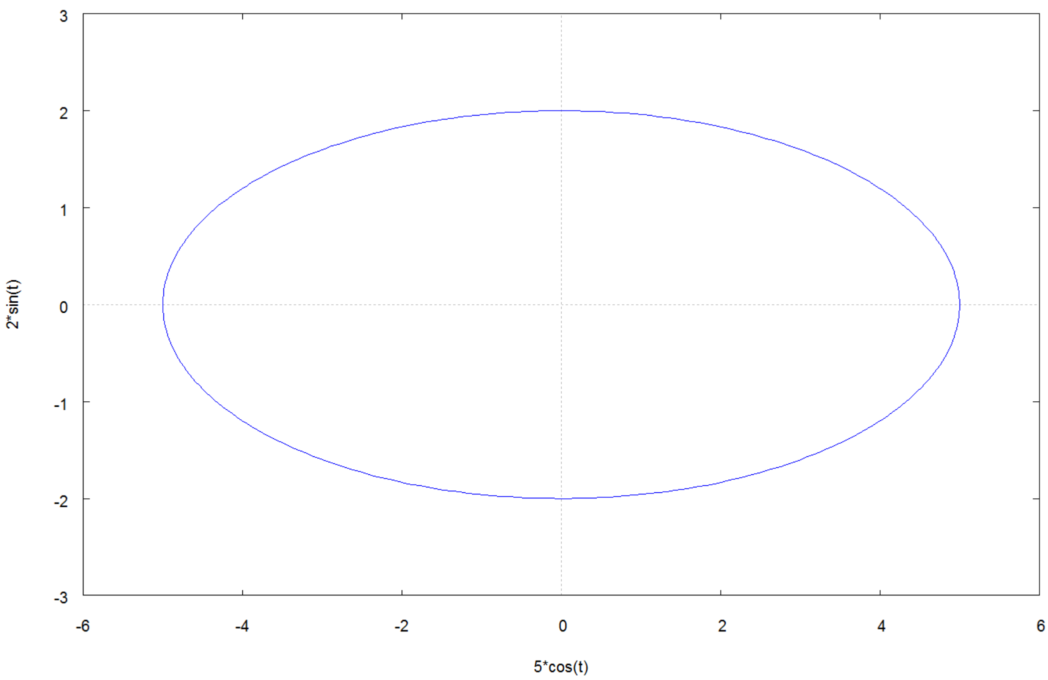

Abbildung 1: Ellipse mit $a = 5$ und $b = 2$

Aufgabe 1.A

a) $\phi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei eine Kurve die wie folgt definiert ist:

$$x(t) := a\cos t, \quad y(t) := b\sin t, \quad a, b > 0$$

Es handelt sich offenbar um eine Ellipse. Man erkennt die herkömmliche Ellipsengleichung sofort durch folgende Umformung:

$$\begin{aligned} x(t) = a\cos t \Leftrightarrow t(x) = \arccos\frac{x}{a} \Rightarrow y(x) := y(t(x)) &= b\sin\arccos\frac{x}{a} \\ \Leftrightarrow y &= b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \Leftrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} &+ \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich *Abbildung 1.*

Für die Ableitung nach x in Abhängigkeit von t gilt:

$$y'_x(t) := \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_{x=x_0} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotan} t$$

Damit ergibt sich für die Tangenten- und Normalengleichungen:

$$
\begin{aligned}
y_t(x) &= y'_x(t)\,(x - x_0(t)) + y_0(t) = -\frac{b}{a}\operatorname{cotan} t\,(x - a\cos t) + b\sin t \\
\hat{y}_t(x) &= -\frac{1}{y'_x(t)}\,(x - x_0(t)) + y_0(t) = \frac{a}{b}\tan t\,(x - a\cos t) + b\sin t
\end{aligned}
$$

Für zur x-Achse parallele Tangenten muss $y'_x(t) = -\frac{b}{a}\operatorname{cotan} t = 0$ erfüllt sein. Mit $a, b > 0$ muss also $\operatorname{cotan} t = 0$ und damit $t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}$ gelten. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y_{\frac{\pi}{2}}(x) &= b\sin\frac{\pi}{2} = b \\
y_{\frac{3\pi}{2}}(x) &= b\sin\frac{3\pi}{2} = -b
\end{aligned}
$$

Für zur y-Achse parallele Tangenten muss die Normale in den entsprechenden Punkten parallel zur x-Achse verlaufen und damit $-\frac{1}{y'_x(t)} = \frac{a}{b}\tan t = 0$ sein. Es folgt sofort $t = 0 \vee t = \pi$. Nun ist $x(0) = a\cos 0 = a$ und $x(\pi) = a\cos\pi = -a$. Damit gilt für die zur y-Achse parallelen Tangenten:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a \\
x_2 &= -a
\end{aligned}
$$

Der Schnittpunkt der beiden Tangenten in den Punkten $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
y_{\frac{\pi}{4}}(x) &= -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{2} \\
y_{\frac{\pi}{2}}(x) &= b \\
y_{\frac{\pi}{4}}(x) = y_{\frac{\pi}{2}}(x) &\Leftrightarrow -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{2} = b \\
&\Leftrightarrow -\frac{b}{a}x + b\sqrt{2} = b \Leftrightarrow x = a\left(\sqrt{2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Damit ist $S_1\left(a\left(\sqrt{2} - 1\right), b\right)$. Für den Schnittpunkt der Normalen in den Punkten $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich mit der Normalengleichung $x = 0$ für den Wert $t = \frac{\pi}{2}$ (wegen $x(\frac{\pi}{2}) = a\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und der horizontalen Tangente an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$):

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{\frac{\pi}{4}}(x) &= \frac{a}{b}\tan\frac{\pi}{4}\left(x - a\cos\frac{\pi}{4}\right) + b\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{2\,a\,x + \sqrt{2}\,b^2 - \sqrt{2}\,a^2}{2\,b} \\
\hat{y}_{\frac{\pi}{4}}(0) &= \frac{\sqrt{2}\,b^2 - \sqrt{2}\,a^2}{2\,b} = \frac{\sqrt{2}}{2\,b}\left(b^2 - a^2\right)
\end{aligned}
$$

Damit ist $S_2\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2\,b}\left(b^2 - a^2\right)\right)$.

b) $\phi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei eine Kurve die wie folgt definiert ist:

$$x(t) := e^{2t} \cos^2 t, \quad y(t) := e^{2t} \sin^2 t$$

Für die Ableitung nach x in Abhängigkeit von t gilt:

$$\begin{aligned} y'_x(t) := \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_{x=x_0} &= \frac{2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\sin t\cos t}{2e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\sin t\cos t} \\ &= \frac{\sin t(\sin t + \cos t)}{\cos t(\cos t - \sin t)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Tangenten- und Normalengleichungen:

$$\begin{aligned} y_t(x) &= y'_x(t)\,(x - x_0(t)) + y_0(t) \\ &= \frac{\sin t(\sin t + \cos t)}{\cos t(\cos t - \sin t)} \left(x - e^{2t}\cos^2 t\right) + e^{2t}\sin^2 t \\ \hat{y}_t(x) &= -\frac{1}{y'_x(t)}\,(x - x_0(t)) + y_0(t) \\ &= -\frac{\cos t(\cos t - \sin t)}{\sin t(\sin t + \cos t)} \left(x - e^{2t}\cos^2 t\right) + e^{2t}\sin^2 t \end{aligned}$$

Für die zur x-Achse parallelen Tangenten muss $\sin t(\sin t + \cos t) = 0$ erfüllt sein. Für $\sin t = 0$ ergibt sich $t = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. $\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = -\cos t$ ist für $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ erfüllt. Damit sind alle Tangenten mit $t = k\pi \vee t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ parallel zur x-Achse.

Für die zur y-Achse parallelen Tangenten muss die zugehörige Normale parallel zur x-Achse sein. Es muss also $\cos t(\cos t - \sin t) = 0$ sein. Mit $\cos t = 0$ muss $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ und mit $\cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t$ muss $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ gelten. Für $t = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ liegt die Tangente also parallel zur y-Achse.

Es lassen sich nun einige Eigenschaften der gegebenen Kurve angeben. So kann jene auf Grund der quadrierten trigonometrischen Funktionen nur im ersten Quadranten Punkte annehmen. Die Kurve berührt des Weiteren für $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ periodisch die y-Achse. Wie oben gezeigt liegt die Tangente in diesen Punkten parallel zur y-Achse. Letztere wird also tatsächlich nur berührt. Der Abstand der aufeinander folgenden Berührpunkte nimmt auf Grund der Exponentialfunktion exponentiell zu. Eine Analoge Betrachtung ergibt sich für die Berührpunkte mit der x-Achse. Diese treten offensichtlich für $t = k\pi$ auf. Auch hier berührt die Kurve die Achse und verbleibt im ersten Quadranten. Für $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich so eine zyklische Struktur, welche in allen Skalierungen eine gleichartige Form aufweist. Der exponentiell zunehmende Abstand der Zyklen führt bei linearen Darstellungen (siehe *Abbildung 2*) zu einer stark eingeschränkten Aussagekraft des Graphen. Trägt man die Kurve über logarithmische Skalen ab (siehe *Abbildung 3*), so erkennt man die zyklische Widerholung der Struktur. Dabei werden die Berührpunkte mit den Achsen stark verschmählert, sodass in der gegebenen Grafik letztere nicht mehr dargestellt werden können.

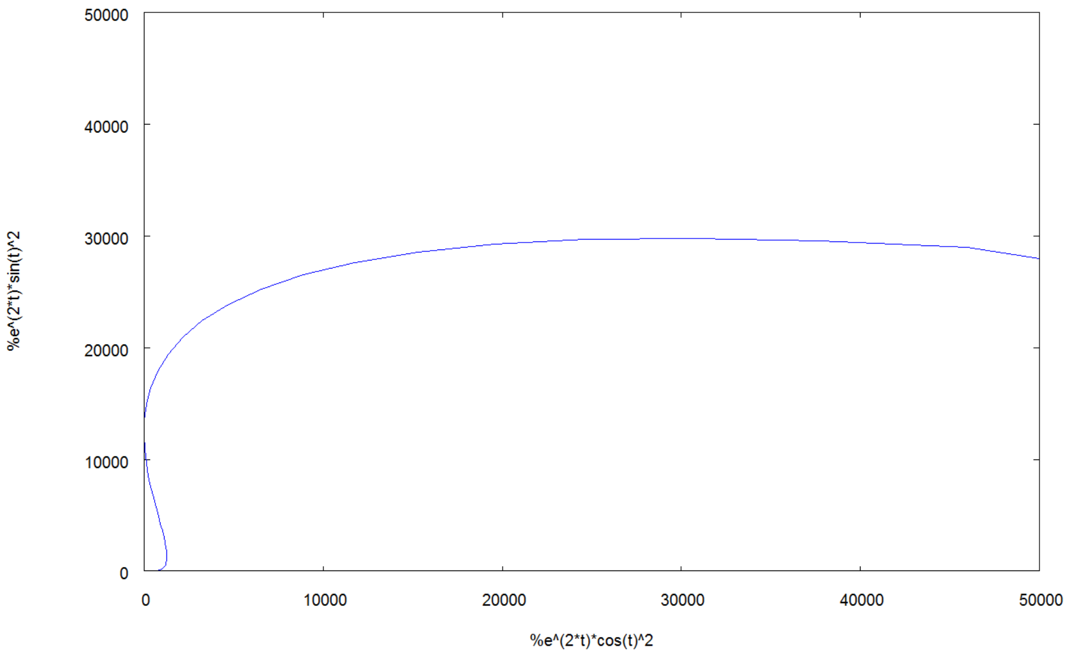

Abbildung 2: Γ_ϕ über lineare Achsen

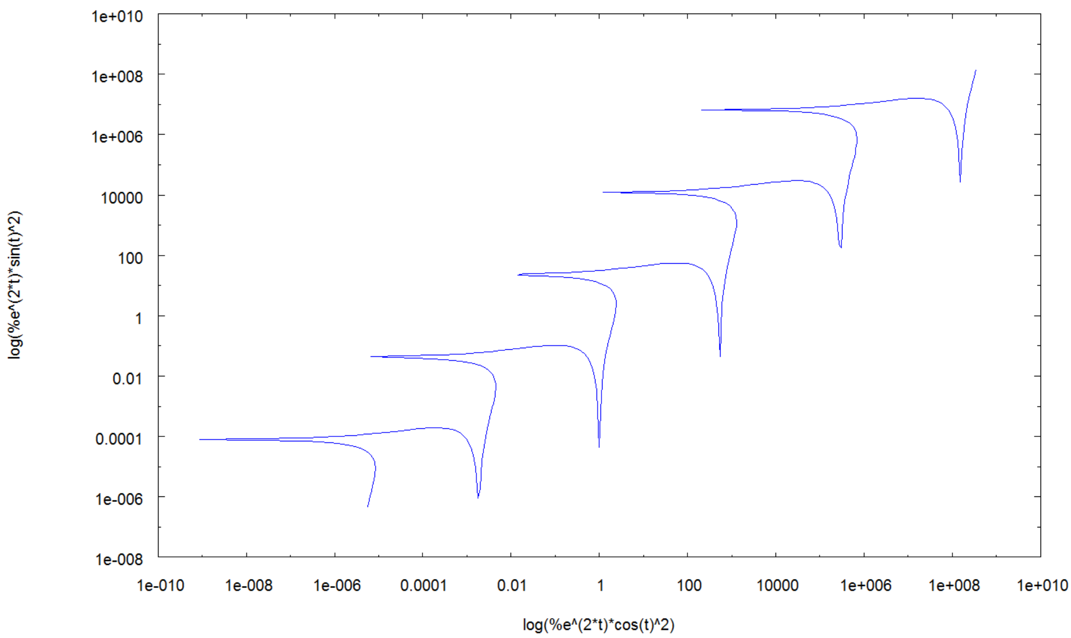

Abbildung 3: Γ_ϕ über logarithmische Achsen

Aufgabe 2.A

Im Folgenden weist $\stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=}$ darauf hin, dass sowohl Nenner als auch Zähler getrennt differenziert wurden und damit die Regel von L'Hospital angewendet wurde. $\stackrel{*}{=}$ weist auf die symbolische Bedeutung des Ausdrucks rechts hin und darf nicht als Gleichheit im herkömmlichen Sinne verstanden werden. Also

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)} \stackrel{*}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

a) Es gilt den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100}$ zu berechnen. Nun ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-100 \cdot x^{-101}}{-2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{-98 \cdot x^{-99}}{-2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \\
&\vdots \\
&\stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{p_{49}}{q_{49}} \cdot \frac{-2 \cdot x^{-3}}{-2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{p_{50}}{q_{50}} \cdot \frac{x^0}{e^{\frac{1}{x^2}}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\infty} \\
&= \frac{p_{50}}{q_{50}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0
\end{aligned}$$

mit $p_n, q_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit ist $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100} = 0$.

b) Es ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} x^{x^x - 1}$ zu berechnen. Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} x^{x^x - 1} = \lim_{x \to 0+} e^{\left(e^{x \ln x} - 1\right) \ln x}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x \ln x &= \lim_{x \to 0+} -\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x \to 0+} -\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0
\end{aligned}$$

Wir betrachten im Folgenden den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+}(e^{x\ln x}-1)\ln x$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}(e^{x\ln x}-1)\ln x &= \lim_{x\to 0+} -\frac{-\ln x}{(e^{x\ln x}-1)^{-1}} \overset{*}{=} \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} -\frac{-\frac{1}{x}}{-(e^{x\ln x}-1)^{-2}e^{x\ln x}(\ln x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0+} -\frac{(e^{x\ln x}-1)^2}{x\ln x\cdot e^{x\ln x}+x\cdot e^{x\ln x}} \overset{*}{=} \frac{0}{0} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} -\frac{2(e^{x\ln x}-1)}{1+x\ln x+\frac{1}{\ln x+1}+x} \overset{*}{=} \frac{0}{1} \\
&= -\frac{(e^0-1)^2}{1+0+0+0} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}
$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$

c) Es soll der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ bestimmt werden. Es gilt

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left[\overset{*}{=}\frac{0}{0}\right] \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \tag{1}
$$

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}\left[\overset{*}{=}\frac{0}{0}\right] \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x}{\cos x} = 1 \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin x\cos x}\left[\overset{*}{=}\frac{0}{0}\right] \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)+x(-2\sin x\cos x-2\sin x\cos x)}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{1+0}{1} = 1
\end{aligned} \tag{3}
$$

Nun ist $\left(\frac{\sin(-x)}{-x}\right)^{\frac{1}{(-x)^2}} = \left(\frac{-\sin x}{-x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Wir können also o.B.d.A $x>0$ fordern. Dann gilt:

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}
$$

Wir betrachten nun $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} \overset{(1)}{\underset{*}{=}} \frac{0}{0} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x}{\sin x}\left(-\frac{1}{x^2}\sin x + \frac{1}{x}\cos x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x\cos x}{\sin x} - 1}{2x^2} \overset{(2)}{\underset{*}{=}} \frac{0}{0} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}}{4x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x\cos x - x}{4x\sin^2 x} \overset{*}{=} \frac{0}{0} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{4\sin^2 x + 8x\sin x\cos x} \overset{*}{=} \frac{0}{0} \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-4\sin x\cos x}{16\sin x\cos x + 8x(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-4}{16 + 8\frac{x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x\cos x}} \overset{(3)}{=} \frac{-4}{16+8} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Aufgabe 3.A

1.) 42

2.) Es gilt den Grenzwert zweier Funktionen zu bestimmen. Hierfür entwickeln wir die Teilfunktionen in Taylorreihen am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und führen dann die Grenzwertbetrachtung durch.

a) Es gilt folgenden Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

Es gilt nach dem Satz von Taylor:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\
e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{3x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{8} - o(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^4}{24} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

b) Es gilt folgenden Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$

Nun gilt nach dem Satz von Taylor:

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln \cos x} = 1 + 0 + 0 - \frac{3}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1+\frac{x^3}{2}-o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.B

Im Folgenden werden die lokalen und globalen Extremwerte zweier Funktionen bestimmt.

a) Es ist $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+2}$. Um den Definitionsbereich D zu ermitteln untersuchen wir zunächst den Nenner auf reelle Nullstellen:

$$x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Damit ist $D = \mathbb{R}$. Nun gilt für die erste Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = \frac{(x^2+2x+2)(2x-3)-(2x+2)(x^2-3x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{5x^2-10}{(x^2+2x+2)^2}$$

Für eine Extremstelle x_0 muss notwendigerweise gelten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\big|_{x=x_0} = 0$. Es ist also

$$\frac{5x^2-10}{(x^2+2x+2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Um die hinreichende Bedingung zu erfüllen muss die zweite Ableitung an den Stellen $x_1 := -\sqrt{2}$ und $x_2 := \sqrt{2}$ untersucht werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y &= \frac{10x(x^2+2x+2)^2 - 2(5x^2-10)(x^2+2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4} \\
&= \frac{10x(x^2+2x+2) - 2(5x^2-10)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^3} \\
&= -\frac{10x^3-60x-40}{(x^2+2x+2)^3}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y\bigg|_{x=x_1} &= -\frac{-20\sqrt{2}+60\sqrt{2}-40}{(4-2\sqrt{2})^3} = -\frac{40\sqrt{2}-40}{(4-2\sqrt{2})^3} < 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y\bigg|_{x=x_2} &= -\frac{20\sqrt{2}-60\sqrt{2}-40}{(4+2\sqrt{2})^3} = \frac{40\sqrt{2}+40}{(4+2\sqrt{2})^3} > 0
\end{aligned}$$

Damit befindet sich an x_1 ein *lokales Maximum* und an x_2 ein *lokales Minimum*. Für die Extremwerte ergibt sich:

$$y_1 := y|_{x=x_1} = \frac{2-3\sqrt{2}+2}{2+2\sqrt{2}+2} = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} < 1$$
$$y_2 := y|_{x=x_2} = \frac{2+3\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}+2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} > 1$$

Es ist aber

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+2} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-3x^{-1}+2x^{-2}}{1+2x^{-1}+2x^{-2}} = 1$$

Damit ist y_1 *globales Maximum* an der Stelle x_1 und y_2 *globales Minimum* an der Stelle x_2.

b) Es ist $y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Der Definitionsbereich ist offensichtlich $D = \mathbb{R}$. Für die erste Ableitung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}$$

Die notwendige Bedingung ergibt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right|_{x=x_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x_1}{1+x_1^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$$

Für die zweite Ableitung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y = \frac{-(1-x)-2x(1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

Nun ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y\right|_{x=x_1} = \frac{1-2-1}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{-1}{2} < 0$$

Damit ist $y_1 := y|_{x=x_1} = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{4}$ *lokales Maximum* und wegen der Stetigkeit von y auf $\mathbb{R}$ zugleich *globales Maximum* der Abbildung.

Aufgabe 5.B

Im Folgenden ist die Lösung der Gleichung $\cos x \cdot \cosh x = 1$ für $x \in [0, 2\pi]$ näherungsweise zu berechnen. Die triviale Lösung $x_a = 0$ mit $cos0 = 1$ und $cosh0 = 1$ ist offensichtlich. Im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fällt die Funktion $f(x) := \cos x \cdot \cosh x$ monoton, wobei $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gilt. Des Weiteren ist $f(x) \leq 0$ für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Für $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ist $f(x)$ monoton wachsend, da sowohl $\cos x$ als auch $\cosh x$ monoton wachsen. Nun ist aber $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ und $f\left(2\pi\right) \approx 268 > 1$. Damit muss sich auf Grund der Stetigkeit von $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ im Intervall

$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ eine zweite Lösung x_b der obigen Gleichung befinden. Wir berechnen diese mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf 0.001 genau. Dabei sei $g(x) := f(x)-1 = \cos x \cdot \cosh x - 1$. Es gilt für die Iteration beim Newton-Verfahren:

$$x_1 = b - \frac{g(b)}{g'(b)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned} b &= 2\pi \\ g(x) &= f(x) - 1 = \cos x \cdot \cosh x - 1 \\ g'(x) &= f'(x) = \cos x \cdot \sinh x - \sin x \cdot \cosh x \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun für die Iterationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\pi - \frac{\cosh 2\pi - 1}{\sinh 2\pi} \approx 5.286913230958836 \\ x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx 4.901247596158896 \\ x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} \approx 4.753492413853174 \\ x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} \approx 4.730564963405035 \\ x_5 &= x_4 - \frac{g(x_4)}{g'(x_4)} \approx 4.730041014674009 \\ x_6 &= x_5 - \frac{g(x_5)}{g'(x_5)} \approx 4.730040744862776 \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Lösung obiger Gleichung näherungsweise gegeben durch $x_b \approx 4.730$.

Aufgabe 6.B

a) Es ist der Krümmungsradius der explizit gegebenen Kurve $y = a \cosh \frac{x}{a}$ zu bestimmen ($a \neq 0$). Nach *G.M. Fichtenholz: Differential und Integralrechnung 1, §250-§251* gilt für den Krümmungsradius einer Kurve in expliziter Form:

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y}$$

Es gilt nun für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y &= a \sinh \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \sinh \frac{x}{a} \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y &= \cosh \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\cosh \frac{x}{a}}{a} \end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich für den Krümmungsradius:

$$R = \frac{a\left(1+\sinh^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\cosh\frac{x}{a}} = \frac{a\left(\cosh^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\cosh\frac{x}{a}} = \frac{a\cosh^3\frac{x}{a}}{\cosh\frac{x}{a}} = a\cosh^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$$

b) Es ist der Krümmungsradius der durch $x = a(\cos t + t\sin t)$ und $y = a(\sin t - t\cos t)$ parametrisierten Kurve zu bestimmen. Nach *G.M. Fichtenholz: Differential und Integralrechnung 1, §250-§251* gilt für den Krümmungsradius einer Kurve in parametrisierter Form:

$$R = \frac{\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y}$$

Es gilt nun für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x &= a(\cos t - t\sin t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y &= a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y &= a(\sin t + t\cos t)
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich für den Krümmungsradius ($a \neq 0$):

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\left((at)^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2 t\cos t(\sin t + t\cos t) - a^2 t\sin t(\cos t - t\sin t)}\\
&= \frac{(at)^3}{(at)^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{(at)^3}{(at)^2} = at
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.B

7.B.1 a)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{x^3}{x^8-2} &= \int \mathrm{d}x \frac{x^3}{\left(x^2-\sqrt[4]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[4]{2}\right)\left(x^4+\sqrt[2]{2}\right)} \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\int \mathrm{d}x \frac{1}{x-\sqrt[8]{2}} + \int \mathrm{d}x \frac{1}{x+\sqrt[8]{2}} + \int \mathrm{d}x \frac{1}{x-i\sqrt[8]{2}}\right. \\
&+ \int \mathrm{d}x \frac{1}{x+i\sqrt[8]{2}} - \int \mathrm{d}x \frac{1}{x-i\sqrt{i}\sqrt[8]{2}} - \int \mathrm{d}x \frac{1}{x+i\sqrt{i}\sqrt[8]{2}} \\
&\left. - \int \mathrm{d}x \frac{1}{x-i\sqrt{-i}\sqrt[8]{2}} - \int \mathrm{d}x \frac{1}{x+i\sqrt{-i}\sqrt[8]{2}}\right] \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\ln\left|x-\sqrt[8]{2}\right| + \ln\left|x+\sqrt[8]{2}\right| + \ln\left|x-i\sqrt[8]{2}\right|\right. \\
&+ \ln\left|x+i\sqrt[8]{2}\right| - \ln\left|x-i\sqrt{i}\sqrt[8]{2}\right| - \ln\left|x+i\sqrt{i}\sqrt[8]{2}\right| \\
&\left. - \ln\left|x-i\sqrt{-i}\sqrt[8]{2}\right| - \ln\left|x+i\sqrt{-i}\sqrt[8]{2}\right|\right] + c \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\ln\left|(x^2-\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt[4]{2})\right| - \ln\left|x^4+\sqrt[2]{2}\right|\right] + c \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + c
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} &\overset{y^2=x}{=} \int \mathrm{d}y \frac{2y}{(1+y^2)y} = 2\int \mathrm{d}y \frac{1}{1+y^2} \\
&= 2\arctan y + c \overset{y=\sqrt{x}}{=} 2\arctan(\sqrt{x}) + c
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}x \frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2} \\
&= \int \mathrm{d}x \frac{3}{(x-1)^2} + \int \mathrm{d}x \frac{4}{x-1} + \int \mathrm{d}x \frac{2}{(x+1)^2} - \int \mathrm{d}x \frac{1}{x+1} \\
&= -3(x-1)^{-1} + 4\ln|x-1| - 2(x+1)^{-1} - \ln|x+1| + c \\
&= -\frac{5x+1}{x^2-1} + \ln\frac{|x-1|^4}{|x+1|} + c
\end{aligned}$$

7.B.2 a)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^2} &\overset{x=y^3}{=} 3\int \mathrm{d}y \frac{y^5}{(1+y)^2} = 3\int \mathrm{d}y \frac{y^5}{1+2y+y^2} \\
&= 3\int \mathrm{d}y \left[y^3 - 2y^2 + 3y - 4 + \frac{5y+4}{(1+y)^2}\right] \\
&= 3\int \mathrm{d}y \left[y^3 - 2y^2 + 3y - 4 + \frac{5}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^2}\right] \\
&= 3\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - 4y + 5\ln|1+y| + \frac{1}{1+y}\right] + c \\
&= 3\left[\frac{3\,y^4 - 8\,y^3 + 18\,y^2 - 48\,y}{12} + 5\ln|1+y| + \frac{1}{1+y}\right] + c \\
&\overset{y=\sqrt[3]{x}}{=} 3\left[\frac{3\,x^{\frac{4}{3}} - 8\,x + 18\,x^{\frac{2}{3}} - 48\,\sqrt[3]{x}}{12} + 5\ln|1+\sqrt[3]{x}| + \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right] + c
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{x^4+1}{x^6+1} &= \frac{2}{3}\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{3}\int \mathrm{d}x \frac{1}{(2x+\sqrt{3})^2+1} + \frac{2}{3}\int \mathrm{d}x \frac{1}{(2x-\sqrt{3})^2+1} \\
&= \frac{2}{3}\arctan x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right) + c \\
&= \frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{3}\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right) + c \\
&= \frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}}{1-(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})}\right) + c \\
&= \frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{4x}{4-4x^2}\right) + c \\
&= \frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right) + c
\end{aligned}$$

c) 42

7.B.3 a)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sin^3 x} &= \int \mathrm{d}x \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2} \overset{y=\cos x}{=} -\int \mathrm{d}y \frac{1}{(1-y^2)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\left[\int \mathrm{d}y \frac{1}{(1-y)^2} + \int \mathrm{d}y \frac{1}{(1+y)^2} + \int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y} + \int \mathrm{d}y \frac{1}{1+y}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y} - \ln|1-y| + \ln|1+y|\right] + c \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} + \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|\right] + c \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{2y}{y^2-1} + \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|\right] + c \\
&= -\frac{y}{2(1-y^2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-y^2}{(1+y)^2}\right| + c \\
&\overset{y=\cos x}{=} -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right| + c \\
&= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + c \\
&= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{1+cos(ax)} &\overset{x=\frac{2y}{a}}{=} \frac{1}{a}\int \mathrm{d}x \frac{1}{\frac{1}{2}(1+cos(2y))} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}x \frac{1}{\cos^2(y)} \\
&= \frac{1}{a}\tan(y) + c \overset{y=\frac{ax}{2}}{=} \frac{1}{a}\tan(\frac{ax}{2}) + c
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \cos(\ln x) &\overset{e^y=x}{=} \int \mathrm{d}y e^y \cos y = e^y \sin y - \int \mathrm{d}y e^y \sin y \\
&= e^y \sin y - \left(-e^y \cos y + \int \mathrm{d}y e^y \cos y\right) \\
&= e^y \sin y + e^y \cos y - \int \mathrm{d}y e^y \cos y \\
&\Leftrightarrow \int \mathrm{d}y e^y \cos y = \frac{1}{2}\left(e^y \sin y + e^y \cos y\right) + c \\
&\overset{y=\ln x}{=} \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + c
\end{aligned}$$

7.B.4 a) 42

b)

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{cos(x)} &= \int \mathrm{d}x \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \int \mathrm{d}x \frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \\
&\overset{x=2\arctan y}{=} \int \mathrm{d}y \frac{2}{1+y^2} \frac{y^2+1}{1-y^2} = 2 \int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y^2} \\
&= 2 \operatorname{artanh} y + c \overset{y=\tan \frac{x}{2}}{=} 2 \operatorname{artanh} \tan \frac{x}{2} + c
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{cos(x)} &= \int \mathrm{d}x \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \int \mathrm{d}x \frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \\
&\overset{x=2\arctan y}{=} \int \mathrm{d}y \frac{2}{1+y^2} \frac{y^2+1}{1-y^2} = 2 \int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y^2} \\
&= \int \mathrm{d}y \frac{1}{1-y} + \int \mathrm{d}y \frac{1}{1+y} \\
&= \ln|1+y| - \ln|1-y| + c = \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + c \\
&\overset{y=\tan \frac{x}{2}}{=} \ln \left| \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}} \right| + c
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} &\overset{x=a\sinh y}{=} \frac{1}{|a|}\int \mathrm{d}y \frac{a\cosh y}{a\sinh y\sqrt{\sinh^2 y+1}} \\
&= \frac{1}{|a|}\int \mathrm{d}y \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{|a|}\int \mathrm{d}y \frac{2}{e^y - e^{-y}} \\
&\overset{y=\ln u}{=} \frac{1}{|a|}\int \mathrm{d}u \frac{2}{u^2-1} \\
&= -\frac{1}{|a|}\left[\int \mathrm{d}u \frac{1}{1-u} + \int \mathrm{d}u \frac{1}{1+u}\right] \\
&= -\frac{1}{|a|}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right] = -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| \\
&\overset{u=e^y}{=} -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{1+e^y}{1-e^y}\right| \\
&\overset{y=\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)=\ln\left(\frac{x}{|a|}+\frac{1}{|a|}\sqrt{x^2+a^2}\right)}{=} -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{|a|}+\frac{1}{|a|}\sqrt{x^2+a^2}}{1-\frac{x}{|a|}-\frac{1}{|a|}\sqrt{x^2+a^2}}\right| \\
&= -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{|a|+x+\sqrt{x^2+a^2}}{-|a|+x+\sqrt{x^2+a^2}}\right| \\
&= -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{|a|x+x^2+x\sqrt{x^2+a^2}}{(-|a|+x+\sqrt{x^2+a^2})x}\right| \\
&= -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{(|a|+\sqrt{x^2+a^2})(-|a|+x+\sqrt{x^2+a^2})}{(-|a|+x+\sqrt{x^2+a^2})x}\right| \\
&= -\frac{1}{|a|}\ln\left|\frac{|a|+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.A

Im Folgenden soll die Bogenlänge der Ellipse von $x = -2$ bis $x = 2$, gegeben durch $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, mit Hilfe der Simpson-Methode bis auf 0.001 genau approximiert werden. Dies entspricht genau dem halben Umfang der gegebnen Ellipse. Parametrisiert lässt sich das Bogenstück durch $\phi(t) = (x(t), y(t))$ mit $t \in [0, \pi]$ und $x(t) = 2\cos t$ sowie $y(t) = \sin t$ darstellen. Es handelt sich dabei um eine Jordansche Kurve, deren Länge gegeben ist durch

$$
L\left(\Gamma_\phi\right) = \int\limits_a^b \mathrm{d}t \left\|\phi'(t)\right\|
$$

Nun gilt:

$$f(t) := \left\|\phi'(t)\right\| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}$$

Es gilt also

$$L\left(\Gamma_\phi\right) = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}t \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}$$

mit der Simpson-Methode zu approximieren. Für die Fehlerabschätzung gilt

$$\left|\int\limits_a^b \mathrm{d}t f(t) - I_S\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max_{\eta\in[a,b]} \left|f^{(4)}(\eta)\right| \leq \frac{\pi^5 \cdot 40}{180 \cdot 2^4 \cdot n^4} = \frac{\pi^5}{72 \cdot n^4}$$

Nun soll gelten:

$$\left|\int\limits_a^b \mathrm{d}t f(t) - I_S\right| \leq \frac{\pi^5}{72 \cdot n^4} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{\pi^5 \cdot 10^3}{72} \leq n^4 \Leftrightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5 \cdot 10^3}{72}} \geq 8$$

Wobei $\max\limits_{\eta\in[a,b]} \left|f^{(4)}(\eta)\right| \leq 40$ mit einem Computer-Algebra-System abgeschätzt wurde. Nun gilt für die äquidistante Zerlegung und die zugehörigen Stützstellen:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\pi k}{8}, \quad k = 0, ..., 8 \\ \xi_k &= \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{\pi(2k+1)}{16}, \quad k = 0, ..., 7 \end{aligned}$$

Nach der Simpson-Regel gilt:

$$\begin{aligned} L\left(\Gamma_\phi\right) = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}t f(t) &\approx \frac{\pi}{6 \cdot 8} \left[f(0) + f(\pi) + 2\sum_{k=1}^{7} f\left(x_k\right) + 4\sum_{k=0}^{7} f\left(\xi_k\right)\right] \\ &\approx 4.844230080750113 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Bogenlänge $L\left(\Gamma_\phi\right) \approx 4.844$.

Aufgabe 9.B

9.B.1

Im Folgenden soll das Volumen des Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die durch

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

gegebene Kurve um die x-Achse rotiert. Für das Volumen eines Rotationskörpers gilt:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int\limits_a^b y^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^\pi (1-\cos t)^2 \mathrm{d}(t - \sin t) = \pi \int\limits_0^\pi (1-\cos t)^3 \mathrm{d}t \\
&= \pi \int\limits_0^\pi 1 - \frac{15}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t + 3\cos^2 t \mathrm{d}t \\
&= \pi \left[\pi - \frac{15}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{2}\pi\right] = \frac{5\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

Wenn der Körper vollständig versenkt wird verdrängt er ein Volumen $V = \frac{5\pi^2}{2}$.

Im Folgenden soll der Tiefgang s berechnet werden, den der obige Rotationskörper (Dichte $\rho_K = 0.9$) aufweist, wenn er mit der flachen Seite nach unten im Wasser (Dichte $\rho_W = 1.0$) schwimmt. Um zu schwimmen muss der Körper ein seinem Gewicht entsprechendes Volumen an Wasser verdrängen. Das Volumen V_o des Körpers, welches oberhalb der Wasseroberfläche liegt, ergibt sich zu

$$V_o = V - \frac{m_K}{\rho_W} = V - \frac{V\rho_K}{\rho_W} = V\left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_W}\right) = \frac{5\pi^2}{2}\left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Es gilt also folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned}
V_o &= \pi \int\limits_0^t (1-\cos x)^3 \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &= \int\limits_0^t 1 - \frac{15}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x + 3\cos^2 x \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &= t - \frac{15}{4}\sin t - \frac{1}{12}\int\limits_0^{3t} \cos y \mathrm{d}y + \frac{3}{2}\int\limits_0^t 1 + \cos 2x \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &= \frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t + \frac{3}{4}\sin 2t \\
\Leftrightarrow 0 &= \frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t - \frac{\pi}{4} =: h(t)
\end{aligned}$$

Die Funktion $h(t)$ ist stetig und es gilt $h(0) \leq 0$ und $h(\pi) \geq 0$. Es existiert also mindestens eine Lösung $t_0 \in [0, \pi]$ für obige Gleichung. Da $h(t) + \frac{\pi}{4}$ das Volumen in Abhängigkeit von t beschreibt muss $h(t)$ in $[0, \pi]$ zudem monoton wachsend sein. Die Lösung ist also eindeutig.
Wir approximieren t_0 mit dem Newton-Verfahren, wobei $b := \pi$ und $h'(t) = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos t +$

$\frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 3t$ gilt. Es ergibt sich für die Approximation:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \pi - \frac{h(\pi)}{h'(\pi)} = \frac{23\,\pi}{32} \\
t_2 &= t_1 - \frac{h\left(t_1\right)}{h'\left(t_1\right)} \approx 1.98636873201841 \\
t_3 &= t_2 - \frac{h\left(t_2\right)}{h'\left(t_2\right)} \approx 1.906028646804606 \\
t_4 &= t_3 - \frac{h\left(t_3\right)}{h'\left(t_3\right)} \approx 1.898771843446373 \\
t_5 &= t_4 - \frac{h\left(t_4\right)}{h'\left(t_4\right)} \approx 1.898714984451295
\end{aligned}$$

Diese Approximation ist offenbar genauer als 0.001. Damit ist $t_0 \approx 1.898$.
Es ergibt sich für den Tiefgang

$$s = x(\pi) - x(t_0) = \pi - t_0 + \sin t_0 \approx 2.190$$

9.B.2

Nun soll der Schwerpunkt der Fläche berechnet werden, die durch die beiden Parabeln

$$y^2 = 2x, \quad x^2 = 2y$$

begrenzt wird. Da die begrenzte Fläche im 1. Quadranten liegt, können wir die Funktionen umschreiben zu

$$f(x) := y = \sqrt{2x}, \quad g(x) := y = \frac{1}{2}x^2$$

Nun schneiden sich beide Graphen an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$. Für $x \in [0,2]$ gilt $f(x) \geq g(x)$. Die Fläche des eingeschlossenen Gebietes ergibt sich zu

$$A = \int_0^2 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Für das Drehmoment um die x-Achse gilt:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 f^2(x) - g^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int_0^2 x^4\mathrm{d}x = 2 - \frac{8}{10} = \frac{6}{5}$$

Für das Drehmoment um die y-Achse gilt:

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^2 x\left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x = \frac{16}{5} - \frac{16}{8} = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$
\begin{aligned}
x_s &= \frac{M_y}{A} = \frac{9}{10} \\
y_s &= \frac{M_x}{A} = \frac{9}{10}
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt der Fläche ist also gegeben als $S\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

Aufgabe 10.B

Es ist die folgende Abschätzung zu beweisen

$$
\frac{35}{72} < \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{3502}{7200} = \frac{1751}{3600}
$$

Hierfür entwickeln wir die Funktion $g(x) := 1 - \cos x$ in eine Taylorreihe am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 1 - \cos(0) + \frac{\sin(0)}{1!}x + \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{-\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{-\cos(0)}{4!}x^4 + \frac{\sin(0)}{5!}x^5 \\
&\quad + \frac{\cos(0)}{6!}x^6 + \frac{-\sin(0)}{7!}x^7 + \frac{-\cos(0)}{8!}x^8 + \frac{\sin(0)}{9!}x^9 + \frac{\cos(0)}{10!}x^{10} + r_{10}(0,x) \\
&= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + r_{10}(0,x) \\
&= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + r_8(0,x)
\end{aligned}
$$

Nun gilt für die Restgliedabschätzung:

$$
\begin{aligned}
r_8(0,x) &= g^{(8+1)}\left(\xi_x\right) \frac{x^{8+1}}{(8+1)!} = \sin\left(\xi_x\right) \frac{x^9}{9!} \geq 0 \\
r_{10}(0,x) &= g^{(10+1)}\left(\tilde{\xi_x}\right) \frac{x^{10+1}}{(10+1)!} = -\sin\left(\tilde{\xi_x}\right) \frac{x^{11}}{11!} \leq 0
\end{aligned}
$$

Für gewisse $\tilde{\xi_x}, \xi_x \in [0,x] \subset [0,1]$ mit $x \in [0,1]$. Damit ergibt sich die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
g(x) = \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + r_{10}(0,x) &\leq \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} \\
g(x) = \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + r_8(0,x) &\geq \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8
\end{aligned}
$$

Division durch x^2 $(x \neq 0)$ ergibt für $x \in [0,1]$:

$$
\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \frac{1}{8!}x^6 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \frac{1}{8!}x^6 + \frac{1}{10!}x^8
$$

Integration führt zur gewünschten (echten (!)) Ungleichung:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \frac{1}{8!}x^6\right] \leq \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \frac{1}{8!}x^6 + \frac{1}{10!}x^8\right]$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3\cdot 4!} \underbrace{+\frac{1}{5\cdot 6!} - \frac{1}{7\cdot 8!}}_{>0} \leq \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2!} - \frac{1}{3\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 6!} \underbrace{-\frac{1}{7\cdot 8!} + \frac{1}{9\cdot 10!}}_{<0}$$

$$\frac{35}{72} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3\cdot 4!} < \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2!} - \frac{1}{3\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 6!} = \frac{1751}{3600}$$

$\square$