Lösungen zum

Arbeitsblatt II zur Vorlesung Analysis 1
WS 2008/09

Marc Sartison, Nicolai Lang
Code: **0001111011**

30. Mai 2009

Aufgabe 1.A

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet wird das Verhalten der Folgen für $n \to \infty$.

a)

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \right] \\
&= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} - \frac{n+1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\overset{*)}{=} 2 \frac{\frac{1}{2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 - 8(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\
&= 3 + \frac{1}{2^n} - 4\frac{n}{2^n} - 4\frac{1}{2^n} + 2\frac{n}{2^n}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}-4\frac{n}{2^n}-4\frac{1}{2^n}+2\frac{n}{2^n}\right)\\
&= 3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}-4\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}+2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\\
&= 3+0-0-0+0=3
\end{aligned}$$

*) Die Summationsformel $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ wurde schon im vorigen Arbeitsblatt implizit benutzt und bewiesen.

Aufgabe 2.A

Im Folgenden sei $n, k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Es ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $a > 1$ gilt.

Offensichtlich ist $\frac{n^k}{a^n} \geq 0 \ \forall_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a > 1$.

Wir schätzen nun im Folgenden a^n nach unten und damit $\frac{n^k}{a^n}$ nach oben ab. Dafür wählen wir $n \geq N > k+1$ genügend groß, sodass gilt

$$\begin{aligned}
a^n &= [(a-1)+1]^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(a-1)^i\\
&= 1+\binom{n}{1}(a-1)+...+\binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}+...+(a-1)^n
\end{aligned}$$

Unter der Vorraussetzung $a > 1$ sind alle Summanden strikt größer Null. Es folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
a^n \geq \binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k)}{(k+1)!}\cdot(a-1)^{k+1}\\
&= \frac{n^{k+1}+o(n^{k+1})}{(k+1)!}\cdot(a-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Wobei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{o(n^{k+1})}{n^{k+1}} = 0$ gilt, da $\deg o(n^{k+1}) \leq k$. Nun ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^k}{\frac{n^{k+1}+o(n^{k+1})}{(k+1)!}\cdot(a-1)^{k+1}} &= \frac{(k+1)!n^k}{[n^{k+1}+o(n^{k+1})]\cdot(a-1)^{k+1}}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{(k+1)!}{[1+\frac{o(n^{k+1})}{n^{k+1}}]\cdot(a-1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

Gehen wir in obiger Ungleichung mit $n\to\infty$ zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(k+1)!}{[1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{o(n^{k+1})}{n^{k+1}}]\cdot(a-1)^{k+1}} = 0\cdot\frac{(k+1)!}{(a-1)^{k+1}} = 0$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $a > 1$. $\square$

b) Es ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ gilt. Hierfür reicht es zu zeigen, dass $\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{|a|^n}{n!} < \epsilon$ beliebig klein wird. Wir können also o.B.d.A annehmen, dass $a \geq 0$ gilt. Die Fälle $a = 0$ und $a \leq 1$ ergeben Produkte bekannter Nullfolgen und sind daher trivial. Wir betrachten demnach im Folgenden den Fall $a > 1$.

Sei $n_0 := \lceil a \rceil + 1$. Dann gilt für genügend große n mit $n \geq n_0$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{a}{n_0} \cdot ... \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1}$$

Nun ist $\frac{a}{n} < 1 \ \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}$ und offensichtlich $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \forall_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $C := \frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$, so gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{a}{n_0} \cdot C \\
&\leq \frac{a}{n_0} \cdot \frac{a}{n_0} \cdot ... \cdot \frac{a}{n_0} \cdot C = \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-(n_o-1)} \cdot C \\
&= \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n_0}{a}\right)^{n_o-1} \cdot C
\end{aligned}$$

Mit $\widetilde{C} := \left(\frac{n_0}{a}\right)^{n_o-1} C$ und $\frac{a}{n_0} < 1$ sowie $a > 1$ ergibt sich die Abschätzung

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n} \cdot \widetilde{C}$$

für $n \geq n_0$ und nach dem Grenzübergang $n \to \infty$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n} \cdot \widetilde{C} = 0 \cdot \widetilde{C} = 0$$

Woraus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ folgt. $\square$

Aufgabe 3

Es sei $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $I_k \neq \emptyset \ \forall_{k\in\mathbb{N}}$. Weiterhin sei $I_{k+1} \subset I_k \ \forall_{k\in\mathbb{N}}$, also $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$. Es ist zu zeigen, dass dann $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$ gilt.

Wir definieren nun die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $x_n := a_n$. Diese ist wegen $a_k \leq a_{k+1} \ \forall_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Wegen $a_k \leq b_k \leq b_1 \ \forall_{k\in\mathbb{N}}$ ist sie zudem nach oben beschränkt. Nach dem Satz aus der Vorlesung folgt unter Berücksichtigung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Existenz eines Grenzwertes $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Es ist nun zu zeigen, dass $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$.

Gegenannahme: $y \notin \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow \exists_{\widetilde{k} \in \mathbb{N}} \quad y \notin I_{\widetilde{k}}$

o.B.d.A sei $y < a_{\widetilde{k}}$ (Ist $y > b_{\widetilde{k}}$ so definiert man die monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := b_n$ und führt den Beweis analog). Daraus folgt aber wegen der Monotonie $\exists_{\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N};n\geq\widetilde{k}}\, y < \xi_1 < \xi_2 < a_{\widetilde{k}} \leq x_n$ und mit $\epsilon := |y - \xi_1| > 0$ gilt:

$$\exists_{\epsilon>0} \forall_{N\in\mathbb{N}} \exists_{n\geq N} \quad |y - x_n| \geq \epsilon \tag{1}$$

Woraus im Widerspruch zur Annahme $y \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ folgt.

Also ist $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ und damit $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$. □

Aufgabe 4

Die Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sind auf Konvergenz zu untersuchen. Wir zeigen im Folgenden Monotonie und Beschränktheit:

1. Es gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Die Summanden lassen sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n^k} \\ &\leq \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot n^k} = \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Damit gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Wie in der Vorlesung bewiesen wurde gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$ und $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow\uparrow$ mit $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ woraus sofort

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to\infty} s_n = e \tag{2}$$

folgt. Damit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.
Nun ist

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} + \frac{1}{n^2+2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&= \left(1 + \left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&\overset{*)}{\geq} \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&= \frac{(n+2)(n^2+2n+1) - (n^2+2n)}{(n+1)(n^2+2n+1)} = \frac{n^3+2n^2+n+2n^2+4n+2-n^2-2n}{n^3+2n^2+n+n^2+2n+1} \\
&= \frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1}{n^3+3n^2+3n+1} = 1 + \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1
\end{aligned}
$$

woraus $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow\uparrow$ folgt. Beschränktheit und Monotonie implizieren die Existenz eines Grenzwertes $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für den zudem wegen (3) $x \leq e$ gilt.

*) Gilt nach der Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall_{x>-1,n\in\mathbb{N},n>1}$, wobei $-\frac{1}{n^2+2n+1} > -1$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Die Beschränktheit der Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten ergibt sich sofort mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung:

$$
y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \geq 2 \tag{3}
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)(n^2+2n) + (n+1)^2}{(n^2+2n)(n+2)} \\
&= \frac{n^3+2n^2+n^2+2n+n^2+2n+1}{n^3+2n^2+2n^2+4n} = \frac{(n^3+4n^2+4n)+1}{n^3+4n^2+4n} \\
&= 1 + \frac{1}{n^3+4n^2+4n} > 1
\end{aligned}
$$

Damit ist $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow\downarrow$ woraus mit (4) die Existenz eines Grenzwertes $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ folgt.

Für beide Grenzwerte gilt offensichtlich:

$$
\begin{aligned}
y - x = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) \right] \\
= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = x \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Woraus $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ folgt.

Im letzten Schritt gilt es nun $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten abzuschätzen. Hierfür zerlegen wir x_n mittels des Binomischen Lehrsatzes in einzelne Summanden und betrachten diese Zerlegung für $n \geq N$ für ein festes $N \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot n^k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{(n-N+1)\cdot(n-N+1)\cdot\ldots\cdot(n-N+1)}{k!\cdot n^k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{(n-N)\cdot(n-N)\cdot\ldots\cdot(n-N)}{k!\cdot n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^k \\
&\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N = \left(1-\frac{N}{n}\right)^N \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

Wir gehen nun in obiger Ungleichung mit $n \to \infty$ zum Grenzwert über und erhalten:

$$
\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{N}{n}\right)^N \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}
$$

Im zweiten Schritt gehen wir mit $N \to \infty$ zum Grenzwert über und erhalten letztendlich:

$$
\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = e
$$

Aus $(x \geq e) \wedge (x \leq e) \Rightarrow (x = e)$ und $x = y$ folgt schließlich

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e \tag{4}
$$

□

Aufgabe 5.B

Im Folgenden sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < 1$ und $\phi \in [0, 2\pi[$ sowie $n \in \mathbb{N}$.
Es ist

$$\begin{aligned}
x_n(\phi) &= \sum_{k=1}^{n} r^k \cos k\phi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^k \left(e^{ik\phi} + e^{-ik\phi}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(re^{i\phi}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(re^{-i\phi}\right)^k\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{re^{i\phi} - \left(re^{i\phi}\right)^{n+1}}{1 - re^{i\phi}} + \frac{re^{-i\phi} - \left(re^{-i\phi}\right)^{n+1}}{1 - re^{-i\phi}}\right]
\end{aligned}$$

Da $0 \leq r < 1$ und $|e^{ix}| = |e^{-ix}| = 1 \ \forall_{x \in \mathbb{R}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n(\phi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{re^{i\phi} - \lim\limits_{n\to\infty}\left(re^{i\phi}\right)^{n+1}}{1 - re^{i\phi}} + \frac{re^{-i\phi} - \lim\limits_{n\to\infty}\left(re^{-i\phi}\right)^{n+1}}{1 - re^{-i\phi}}\right] \\
&\overset{*)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{re^{i\phi}}{1 - re^{i\phi}} + \frac{re^{-i\phi}}{1 - re^{-i\phi}}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{re^{i\phi}\left(1 - re^{-i\phi}\right) + re^{-i\phi}\left(1 - re^{i\phi}\right)}{\left(1 - re^{i\phi}\right)\left(1 - re^{-i\phi}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{re^{i\phi} + re^{-i\phi} - 2r^2}{r^2 + 1 - r\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)} = \frac{1}{2} r \cdot \frac{2\cos\phi - 2r}{r^2 + 1 - 2r\cos\phi} \\
&= r \cdot \frac{\cos\phi - r}{r^2 + 1 - 2r\cos\phi}
\end{aligned}$$

Betrachten wir den kleinsten Wert des Nenners $r^2 + 1 - 2r\cos\phi$ für $\phi = 0$ so gilt $r^2 + 1 - 2r = (r-1)^2 > 0$ für $r < 1$. Damit ist $\{x_n(\phi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\forall_{\phi \in [0,2\pi[}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\phi) = r \cdot \frac{\cos\phi - r}{r^2 + 1 - 2r\cos\phi}$$

*) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(re^{-i\phi}\right)^{n+1} = 0$ für $0 \leq r < 1$, da $\left|\left(re^{-i\phi}\right)^{n+1}\right| = \left|r^{n+1}\right| \left|e^{-i\phi(n+1)}\right| = \left|r^{n+1}\right| \cdot 1 < \varepsilon$ für große n gilt.

Aufgabe 6.B

Es ist zu untersuchen, ob jede abgeschlossene Menge in $\left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$ als Vereinigung höchstens abzählbar vieler, paarweise disjunkter offener Intervalle dargestellt werden kann. Wir betrachten hierfür die Cantor-Menge C:

Sei $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Familie von Mengen $C_n \subset [0,1]$, sodass gilt

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{9}{9}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

In Worten: C_{n+1} wird aus C_n durch entfernen der offenen, mittleren Drittel jedes zusammenhängenden Teilintervalls von C_n erstellt. Als direkte Folge dieser Rekursionsvorschrifft ergibt sich die Inklusion nachfolgender Glieder:

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_n$$

Des Weiteren ist C_n abgeschlossen bezüglich der Betragsmetrik $d_{|\cdot|}$, da C_n als endliche Vereinigung abgeschlossener (disjunkter) Mengen dargestellt werden kann.

Die Cantor-Menge ist nun als Schnittmenge aller Glieder der Mengenfamilie $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert:

$$C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Nach dem in der Vorlesung bewiesenen Satz folgt, dass $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ ebenfalls abgeschlossen ist. Nun lässt sich aber jede Menge C_n nach der rekursiven Definition als Vereinigung disjunkter, abgeschlossener Teilmengen darstellen, wobei sich die Anzahl der disjunkten Teilmengen mit jedem Schritt verdoppelt. Es ist also $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j$ mit $I_j \cap I_i = \emptyset \quad \forall_{j,i\in\{1,2,...,2^n\};i\neq j}$. Es ist aber offenbar $\left|\{I_j\}_{j\in\{1,2,...,2^n\}}\right| = 2^n$. Es existiert also eine Bijektion zwischen den disjunkten Teilmengen I_j von C_n und der Potenzmenge einer n-elementigen Menge. Nun ist

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_j \tag{6}$$

Auf Grund der Inklusion aufeinander folgender C_n kann C offenbar auch als "Grenzwert" der Mengenfolge $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet werden. Es existiert dann aber eine Bijektion von der Menge aller Intervalle I zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Die Cantor-Menge kann dann aber als Vereinigung überabzählbar vieler, disjunkter, abgeschlossener Intervalle dargestellt werden, wobei C selbst abgeschlossen ist. Folglich existieren abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$, die nicht als Vereinigung höchstens abzählbar vieler, paarweise disjunkter abgeschlossener Intervalle darstellbar sind.

Aufgabe 7.B

Es ist zu zeigen, dass $\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ gilt, wobei der Abschluss als $\overline{X} := X \cup \partial X = int\,(X) \dot\cup \partial X$ definiert ist.

Wir betrachten hierfür die disjunkte Zerlegung

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= int\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \,\dot\cup\, \partial\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \,\dot\cup\, ext\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \\ &= \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \,\dot\cup\, ext\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \\ &= \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \,\dot\cup\, int\,(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

Es ist also $\left[\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\right] \Leftrightarrow [int\,(\mathbb{Q}) = \emptyset]$.

Gegenannahme: $int\,(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

Sei nun $x_0 \in int\,(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ beliebig. Wir betrachten ein ebenfalls beliebiges $\varepsilon > 0$ und die dadurch definierte ε-Umgebung $U_\varepsilon\,(x_0) \subset \mathbb{R}$.
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ erlaubt es uns ein $N \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass $a_n < \varepsilon \quad \forall_{n\geq N}$ gilt.

Nun ist aber $x_0 + a_n \in U_\varepsilon\,(x_0) \quad \forall_{n\geq N}$, da $|x_0 - (x_0 + a_n)| = a_n < \varepsilon$ nach Vorraussetzung. Da $x_0 \in \mathbb{Q}$ und $a_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ folgt $(x_0 + a_n) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dann gilt aber $U_\varepsilon\,(x_0) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ und schließlich $x_0 \notin int\,(\mathbb{Q})$ da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde.

Dies führt zum Widerspruch woraus $int\,(\mathbb{Q}) = \emptyset$ und damit die Behauptung folgen. $\square$

Aufgabe 8.A

Im Folgenden sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ beschränkt. Der obere Grenzwert ist definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right) \tag{7}$$

Es ist zu zeigen, dass für jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der obere Grenzwert $\overline{a} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

Beweis. Sei $E_n := \{x \in \mathbb{R} | x = a_k, k \geq n\}$ das Bild der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}, k\geq n}$. Dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup E_n)$. Nun gilt offenbar folgende Inklusionsbeziehung:

$$E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_{n-1} \supset E_n$$

Aus der vorausgesetzten Beschränktheit von E_1 folgt, dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, E_n$ beschränkt ist . Dann gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{s_n\in\mathbb{R}}\, s_n = \sup E_n$. Wir können also die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu $s_n := \sup E_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$

definieren. Auf Grund obiger Inklusionsbeziehung muss aber offenbar gelten:

$$\sup E_1 \geq \sup E_2 \geq ... \geq \sup E_{n-1} \geq \sup E_n \Rightarrow s_n \geq s_{n+1} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Damit ist aber $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ (monoton fallend).

Des Weiteren gilt $\forall_{k\geq n}\, s_n \geq a_k$ (s_n ist obere Schranke von E_n). Nun gilt aber: $\exists_{\underline{C}\in\mathbb{R}}\forall_{k\in\mathbb{N}}\, a_k \geq \underline{C}$ (Beschränktheit der Folge). Daraus folgt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, s_n \geq \underline{C}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ also nach unten beschränkt ist.

Es folgt die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geq n} a_k\right) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Es soll nun gezeigt werden, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{k\geq n} a_k\right)$ gilt.

Sei nun $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ wie oben definiert. Dann gilt es zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

Lemma 1: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton.
Sei weiterhin $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \tag{8}$$

und für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \tag{9}$$

Beweis. Sei o.B.d.A $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ monoton fallend. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ zu zeigen.
Sei E_1 definiert wie oben und somit die Bildmenge der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da E_1 beschränkt nach Vorraussetzung gilt für die Menge der unteren Schranken: $M^- \neq \emptyset$. Dann muss auf Grund der Monotonie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in M^-$ gelten.

Gegenannahme: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin M^-$. Daraus folgt $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, x > x_{n_0}$. Wegen der Monotonie ist dann aber $\forall_{n\geq n_0}\, x > x_{n_0} \geq x_n$. Nun $\exists_{\delta_1,\delta_2}\, x > \delta_1 > \delta_2 > x_{n_0}$. Setze nun $\varepsilon := d(\delta_1, x) > 0$. Dann ist aber $\forall_{n\geq n_0}\, d(x, x_n) \geq \varepsilon$ woraus $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n\geq N}\, d(x, x_n) \geq \varepsilon$ und schließlich der Widerspruch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x$ folgt. Damit muss $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in M^-$ gelten.

Nun ist zu zeigen, dass $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \max M^-$.
Gegenannahme: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \max M^-$. Dann folgt aber: $\exists_{\widetilde{x}\in M^-}\, \widetilde{x} > x$. Nun $\exists_{\delta_1,\delta_2}\, \widetilde{x} > \delta_1 > \delta_2 > x$. Mit $\varepsilon := d(\delta_2, x) > 0$ und $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \geq \widetilde{x}$ folgt sofort der Widerspruch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x$.

Es muss also $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ gelten. Analog ergibt sich $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ für monoton wachsende Folgen. $\square$

Die Behauptung $\lim_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n$ folgt nun mit $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ direkt aus *Lemma 1.* $\square$

Lemma 2: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$\overline{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow [\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\, x_n < \overline{x}+\varepsilon] \wedge [\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, x_{n_0} > \overline{x}-\varepsilon] \quad (10)$$

und analog

$$\underline{x} = \liminf_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow [\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\, x_n > \underline{x}-\varepsilon] \wedge [\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, x_{n_0} < \underline{x}+\varepsilon] \quad (11)$$

Beweis. Wir beweisen im Folgenden die Äquivalenz (11). (12) ergibt sich analog.

1. $\Rightarrow$ Es ist $\overline{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, wobei $s_n := \sup_{k\geq n} x_k$ wie oben definiert ist.
   Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert dann ein N, sodass $\forall_{n\geq N}\, \overline{x} \leq s_n < \overline{x}+\varepsilon$, da $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$. Dann muss aber für alle $k \geq n \geq N$ die Ungleichung $x_k \leq s_n < \overline{x}+\varepsilon$ gelten. Des Weiteren ist $\overline{x} \leq s_n$. Dann existiert aber ein $k \geq n$, sodass $x_k > s_n - \varepsilon \geq \overline{x}-\varepsilon$.

2. $\Leftarrow$ Es ist nun $[\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\, x_n < \overline{x}+\varepsilon] \wedge [\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, x_{n_0} > \overline{x}-\varepsilon]$.
   Dann muss aber $s_N \leq \overline{x}+\varepsilon$ sein, woraus durch den Grenzübergang $N \to \infty$ sofort $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \overline{x}+\varepsilon$ folgt. Da aber $\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, x_{n_0} > \overline{x}-\varepsilon$ muss auch $s_N \geq \overline{x}-\varepsilon$, woraus analog $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \overline{x}-\varepsilon$ folgt. Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein, also $\varepsilon \to 0$, so ergibt sich $\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. $\square$

Seien nun $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen. Sei des Weiteren $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $b = \limsup_{n\to\infty} b_n$. Es ist zu zeigen, dass folgende Ungleichung gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \quad (12)$$

Wir betrachten ein $\varepsilon > 0$. Nun gilt wegen *Lemma 2*: $\exists_{N^{(a)}_{\frac{\varepsilon}{2}}\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N^{(a)}_{\frac{\varepsilon}{2}}}\, a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$.
Analog $\exists_{N^{(b)}_{\frac{\varepsilon}{2}}\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N^{(b)}_{\frac{\varepsilon}{2}}}\, b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $N_\varepsilon := \max\left\{N^{(a)}_{\frac{\varepsilon}{2}}, N^{(b)}_{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$. Dann gilt $\forall_{n\geq N_\varepsilon}$:

$$a_n + b_n \leq a + b + \varepsilon$$

Es ist nun zu zeigen, dass $a + b \geq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ gilt.

Gegenannahme: $a+b < \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \Rightarrow \exists_{\delta_1,\delta_2} a+b < \delta_1 < \delta_2 < \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. Sei nun $\varepsilon := d(a+b,\delta_1)$. Dann gilt $\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ a_n + b_n \leq a+b+\varepsilon = \delta_1 < \delta_2 < \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$. Ist $\widetilde{\varepsilon} := d\left(\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n), \delta_2\right)$, dann gilt aber $\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ (a_n+b_n) < \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) - \widetilde{\varepsilon} = \delta_2$. Dies widerspricht aber nach *Lemma 2* den Eigenschaften des Limes-Superior $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$. Es folgt $a+b \geq \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ und damit die Behauptung. □

Im Allgemeinen gilt die Gleichheit obiger Ungleichung nicht, da sich zwei Folgen punktweise kompensieren oder zumindest "abschwächen" können. Ein triviales Beispiel hierfür sind die Folgen

$$a_n = (-1)^n\,, \quad b_n = (-1)^{n+1}$$

Es ist offenbar $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 1+1 = 2$ aber $a_n + b_n = 0$ und daher $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0 < 2$.

Zuletzt ist zu zeigen, dass folgende Äquivalenz gilt:

$$\exists_{\tilde{A}\in\mathbb{R}}\tilde{A} = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \exists_{A\in\mathbb{R}} A = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{13}$$

Und zudem $\tilde{A} = A$.

Beweis.

1. $\Rightarrow$ Sei $\tilde{A} = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.
   Nach *Lemma 2* gilt dann

   $$\left[\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon^+\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon^+}\ a_n < \tilde{A}+\varepsilon\right] \wedge \left[\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\ a_{n_0} > \tilde{A}-\varepsilon\right]$$

   und

   $$\left[\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon^-\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon^-}\ a_n > \tilde{A}-\varepsilon\right] \wedge \left[\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\ a_{n_0} < \tilde{A}+\varepsilon\right]$$

   Setze nun $N_\varepsilon := \{\max N_\varepsilon^+, N_\varepsilon^-\}$. Dann gilt

   $$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ \left(a_n > \tilde{A}-\varepsilon\right) \wedge \left(a_n < \tilde{A}+\varepsilon\right)$$

   Woraus sofort $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ \left|a_n - \tilde{A}\right| < \varepsilon$ und damit $\tilde{A} = \lim_{n\to\infty} a_n$ folgt.

2. $\Leftarrow$ Sei $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.
   Dann ist $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\quad \left|a_n - \tilde{A}\right| < \varepsilon$ woraus

   $$\begin{aligned} &\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ a_n < \tilde{A}+\varepsilon \\ \wedge\quad &\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\ a_n > \tilde{A}-\varepsilon \end{aligned}$$

folgt. Mit den Implikationen

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\, a_n < \tilde{A}+\varepsilon \Rightarrow \forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, a_{n_0} < \tilde{A}+\varepsilon$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon}\, a_n > \tilde{A}-\varepsilon \Rightarrow \forall_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n_0\geq N}\, a_{n_0} > \tilde{A}-\varepsilon$$

ergeben sich die Bedingungen für $\tilde{A} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\tilde{A} = \liminf_{n\to\infty} a_n$ wie sie schon in Punkt 1. verwendet wurden.

$\square$

Aufgabe 9.B

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Es ist zu zeigen, dass die Verkettung $h := g \circ f$ ebenfalls stetig ist.
Es ist $D(h) = D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}^n | x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$. Wir betrachten nun ein beliebiges $x_0 \in D(h)$ und ein frei gewähltes $\varepsilon > 0$.

Da f stetig gilt $\forall_{\tilde{\varepsilon}>0}\exists_{\tilde{\delta}>0}\forall_{x\in U_{\tilde{\delta}}(x_0)\cap D(f)}\, f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(f(x_0))$ und analog für g:
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in U_\delta(y_0)\cap D(g)}\, g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$, wobei $y = f(x)$. Demnach existiert ein δ, sodass $\forall_{f(x)\in U_\delta(f(x_0))}\, g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(x_0)))$. Setzen wir nun $\tilde{\varepsilon} := \delta$, dann existiert ein $\tilde{\delta}$ derart, dass $\forall_{x\in U_{\tilde{\delta}}(x_0)}\, f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(f(x_0)) = U_\delta(f(x_0))$. Damit gilt aber

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\tilde{\delta}>0}\forall_{x\in U_{\tilde{\delta}}(x_0)\cap D(h)}\, h(x) = g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(x_0))) = U_\varepsilon(h(x_0)) \tag{14}$$

woraus die Stetigkeit von h in x_0 folgt. Da $x_0 \in D(h)$ beliebig gewählt wurde ist damit $h := g \circ f$ stetig auf ganz $D(h)$. $\square$

Aufgabe 10.B

c sei der Raum aller konvergenter Folgen in $\mathbb{R}$. Auf diesem sei eine Metrik wie folgt definiert:

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in c \tag{15}$$

Es ist zu zeigen, dass (c, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Sei fortan $\left\{\{x_n\}^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \in CF(c)$ eine Cauchy-Folge in c. Dann ist $\{x_n\}^{(i)}_{n\in\mathbb{N}}$ nach Vorraussetzung eine Konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und damit $\{x_n\}^{(i)}_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{R})\ \forall_{i\in\mathbb{N}}$.
Wir führen den Beweis in drei Schritten:

1. *Konstruktion eines Kandidaten*

Da $\left\{\{x_n\}^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \in CF\,(c)$ gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{I(\varepsilon)}\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)}\, d\left(\{x_n\}^{(i)}, \{x_n\}^{(j)}\right) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow\forall_{\varepsilon>0}\exists_{I(\varepsilon)}\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)} \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow\forall_{\varepsilon>0}\exists_{I(\varepsilon)}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \varepsilon$$

Wir wählen nun ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{I(\varepsilon)}\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \varepsilon \tag{16}$$

Dann ist wegen (17) $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \in CF\,(\mathbb{R})$ für ein fixes n. Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert dann auch ein Grenzwert in $\mathbb{R}$. Sei nun $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als $x_n := \lim\limits_{i\to\infty} x_n^{(i)}$.

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Folge $\left\{\{x_n\}^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$.

2. *Nachweis der Konvergenz*

Es ist nun zu zeigen, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in CF\,(\mathbb{R})$ ist.

Wegen der Konvergenz der Folgen in c gilt für ein beliebiges aber festes $i \in \mathbb{N}$:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N(\varepsilon)}\forall_{n,m\geq N(\varepsilon)} \left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| < \varepsilon \tag{17}$$

Nach Vorraussetzung existiert der Grenzwert $x^{(i)} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)}$. Wir betrachten nun ein $\varepsilon > 0$ und ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $N(\varepsilon)$ sodass $\left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| < \varepsilon$ $\forall_{n,m\geq N(\varepsilon)}$.

Nun ist wegen $\left\{\{x_n\}^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}} \in CF\,(c)$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{I(\varepsilon)}\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \varepsilon \tag{18}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen der Supremums-Metrik). Dann existiert ein $I(\varepsilon)$ sodass $\forall_{i,j\geq I(\varepsilon)} \left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \varepsilon$ gilt. Wir gehen nun mit $j \to \infty$ zum Grenzwert über und erhalten $\forall_{i\geq I(\varepsilon)}\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|x_n^{(i)} - x_n\right| \leq \varepsilon$.

Sei nun $i \geq I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ und $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|x_n - x_n^{(i)} + x_n^{(i)} - x_m^{(i)} + x_m^{(i)} - x_m\right| \\
&\leq \left|x_n - x_n^{(i)}\right| + \left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| + \left|x_m^{(i)} - x_m\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ist nun $\widetilde{N}_\varepsilon := \max\left\{I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}$, dann gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\widetilde{N}_\varepsilon}\forall_{n,m\geq\widetilde{N}_\varepsilon}\ |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{19}$$

Damit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{R})$. Es folgt auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und letztendlich $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$.

3. *Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz*

   Zuletzt muss gezeigt werden, dass $\left\{\{x_n\}^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ nicht nur punktweise sondern gleichmäßig gegen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
   Wir können, wie in Punkt 2 gezeigt wurde, $I\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ so wählen, dass $\forall_{i\geq I\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\forall_{n\in\mathbb{N}}\left|x_n^{(i)} - x_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, woraus sofort $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|x_n^{(i)} - x_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ folgt. Damit gilt aber mit $\widetilde{I}_\varepsilon := I\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\widetilde{I}_\varepsilon}\forall_{i\geq\widetilde{I}_\varepsilon}\, d\left(\{x_n\}^{(i)}, \{x_n\}\right) < \varepsilon \tag{20}$$

   Es folgt $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{i\to\infty}\{x_n\}^{(i)}$ bezüglich der Metrik d. Damit ist c vollständig. □