

Lösung großes Übungsblatt I

0001111011

Yvonne Geyer, Nicolai Lang, Marc Sartison, Jan Köllner

29. August 2009

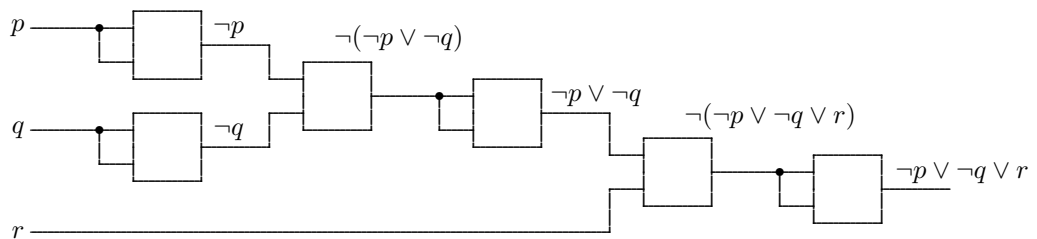
Aufgabe 1

1.A Es sind die gegebenen Logischen Ausdrücke mit einer Schaltung von NOR-Gliedern zu realisieren. Dabei sind Module zur Realisierung der Negation und Disjunktion bereits vorgegeben.

(a) Der Logische Ausdruck $o = ((p \wedge q) \Rightarrow r)$ lässt sich vereinfachen zu

$$o = ((p \wedge q) \Rightarrow r) = (\neg(p \wedge q) \vee r) = (\neg p \vee \neg q \vee r).$$

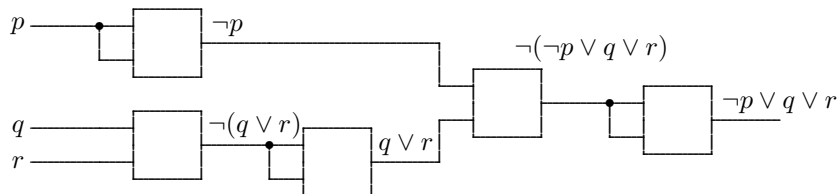
Man erhält folgende Schaltung:



(b) Der Logische Ausdruck $o = ((p \Rightarrow q) \vee r)$ lässt sich vereinfachen zu

$$o = ((p \Rightarrow q) \vee r) = ((\neg p \vee q) \vee r) = (\neg p \vee q \vee r).$$

Man erhält folgende Schaltung:



Aufgabe 2

2.A Gegeben sei die Funktion $f : X \rightarrow Y$. Es ist die Äquivalenz der Aussagen p , q und r zu zeigen:

- p : f ist eineindeutig $\Leftrightarrow f$ ist injektiv $\Leftrightarrow (\forall_{a,b \in X} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$,
 q : $\forall_{A \subset X} (f^{-1}(f(A)) = A)$,
 r : $\forall_{A \subset X} \forall_{B \subset X} ((A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (f(A) \cap f(B) = \emptyset))$.

Dabei genügt es die Implikationskette $p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow p$ zu zeigen.

(I) Zu zeigen:

$$(\forall_{a,b \in X} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b) \Rightarrow (\forall_{A \subset X} (f^{-1}(f(A)) = A))$$

$$\text{Beweis durch Kontraposition: } \Leftrightarrow (\exists_{A \subset X} f^{-1}(f(A)) \neq A) \Rightarrow (\exists_{a,b \in X} (a \neq b \wedge f(a) = f(b)))$$

Da $f^{-1}(f(A)) \neq A$ gibt es ein $a \in A$ und ein $b \notin A$, so dass $f(a) = f(b) \in f(A)$ ist. Aus $a \in A$ und $b \notin A$ folgt weiterhin, dass $a \neq b$ ist.

(II) Zu zeigen:

$$(\forall_{A \subset X} (f^{-1}(f(A)) = A)) \Rightarrow (\forall_{A \subset X} \forall_{B \subset X} ((A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (f(A) \cap f(B) = \emptyset)))$$

Beweis durch Kontraposition:

$$\Leftrightarrow (\exists_{A \subset X} \exists_{B \subset X} (f(A) \cap f(B) \neq \emptyset) \wedge (A \cap B = \emptyset)) \Rightarrow (\exists_{A \subset X} f^{-1}(f(A)) \neq A)$$

Es seien A, B zwei disjunkte Teilmengen von X . Weiterhin sei für ein $a \in A$ und ein $b \in B$ $f(a) = f(b)$, d.h. $f(a) = f(b) \in f(A) \wedge f(a) = f(b) \in f(B) \Rightarrow f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$.

$$\text{Da } f(b) \in f(A) \Rightarrow b \in f^{-1}(f(A)).$$

$$\text{Es ist jedoch } b \notin A \wedge b \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow A \neq f^{-1}(f(A)).$$

(III) Zu zeigen:

$$(\forall_{A \subset X} \forall_{B \subset X} ((A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (f(A) \cap f(B) = \emptyset))) \Rightarrow (\forall_{a,b \in X} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

Beweis durch Kontraposition:

$$\Leftrightarrow (\exists_{a,b \in X} a \neq b \wedge f(a) = f(b)) \Rightarrow (\exists_{A \subset X} \exists_{B \subset X} (f(A) \cap f(B) \neq \emptyset) \wedge (A \cap B = \emptyset))$$

Seien $a \in \{a\}$ und $b \in \{b\}$, wobei $a \neq b$. D.h. es ist $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$.

Sei weiterhin $f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) = f(b) \in f(\{a\}) \wedge f(a) = f(b) \in f(\{b\})$.

D.h. es ist $f(\{a\}) \cap f(\{b\}) \neq \emptyset$.

□

Aufgabe 3

3.1.A Es ist die Lösungsmenge folgender Gleichung für $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = 1.$$

Es ist $\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 1} = 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x^2 + 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow 2x + 1 = 2\sqrt{x^2 + 2x - 1} \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4(x^2 + 2x - 1) \\
&\Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{20}{4} + 1} - \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{10}{4} - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{25+80+16}{16}} - \sqrt{\frac{25+40-16}{16}} \\
&= \frac{11}{4} - \frac{7}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

3.2.B Es sind die Lösungsmengen folgender Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen:

(a) $\sin(2x) + 3 \sin(x) - 2 \tan(x) = 0$

Es ist $\sin(2x) + 3 \sin(x) - 2 \tan(x) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2 \sin(x) \cos(x) + 3 \sin(x) - 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \left(2 \cos(x) + 3 - \frac{2}{\cos(x)} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee \left(2 \cos(x) + 3 - \frac{2}{\cos(x)} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow L_1 = \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

$$\left(2 \cos(x) + 3 - \frac{2}{\cos(x)} = 0 \right) \Leftrightarrow 2 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$$

Durch Substitution $z := \cos(x)$ erhält man $2z^2 + 3z - 2 = 0$. $\Rightarrow z_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$$\Rightarrow z_+ = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, z_- = \frac{-8}{4} = -2.$$

Resubstitution liefert:

$$\begin{aligned}
&z_- = -2 = \cos(x) \Rightarrow L_2 = \emptyset, \\
&z_+ = \frac{1}{2} = \cos(x) \Rightarrow L_3 = \{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \{x \mid x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

(b) $6 \cos^2(x) - \sin(2x) = 2$

Es ist $6 \cos^2(x) - \sin(2x) = 2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 6 \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow 6 \cos^2(x) - 2 \sqrt{1 - \cos^2(x)} \cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow 3 \cos^2(x) - 1 = \cos(x) \sqrt{1 - \cos^2(x)} \\
&\Leftrightarrow 9 \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) + 1 = \cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) \\
&\Leftrightarrow 10 \cos^4(x) - 7 \cos^2(x) + 1 = 0
\end{aligned}$$

Durch Substitution $u = \cos^2(x)$ erhält man $10u^2 - 7u + 1 = 0$. $\Rightarrow u_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{20} = \frac{7 \pm 3}{20}$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, u_2 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Resubstitution liefert:

$$\cos(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{7}{4}\pi$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_3 = \frac{5}{4}\pi, x_4 = \frac{3}{4}\pi$$

Probe liefert x_1, x_3 sind Lösung der Gleichung, x_2, x_4 ergeben keine Lösung.

$$\Rightarrow L_1 = \{x \mid x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x_5 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 1,11, \text{ Probe liefert } x_5 \text{ ist keine Lösung,}$$

$$x_6 = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 5,18, \text{ Probe liefert } x_6 \text{ ist Lösung,}$$

$$x_7 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 2,03, \text{ Probe liefert } x_7 \text{ ist Lösung,}$$

$$x_8 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 4,25, \text{ Probe liefert } x_8 \text{ ist keine Lösung.}$$

$$\Rightarrow L_2 = \{x \mid x = x_6 + 2k\pi \vee x = x_7 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = x_6 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow L = \{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = x_6 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 4

4.1.B Es sind die Lösungsmengen einiger Ungleichungen zu bestimmen.

(a) $|x - 2| + |4 - x| \leq x + 1$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{(I) } x < 2: \text{ d.h. } & |x - 2| < 0, |4 - x| > 0 \\ & \hookrightarrow -x + 2 + 4 - x \leq x + 1 \\ & \hookrightarrow 5 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 = \{x \mid \frac{5}{3} \leq x < 2\}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } 2 \leq x \leq 4: \text{ d.h. } & |x - 2| \geq 0, |4 - x| \geq 0 \\ & \hookrightarrow x - 2 + 4 - x \leq x + 1 \\ & \hookrightarrow 1 \leq x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_2 = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) } x > 4: \text{ d.h. } & |x - 2| > 0, |4 - x| < 0 \\ & \hookrightarrow x - 2 - 4 + x \leq x + 1 \\ & \hookrightarrow x \leq 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_3 = \{x \mid 4 < x \leq 7\}$$

$$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid \frac{5}{3} \leq x \leq 7\}$$

(b) $|x - \frac{1}{2}|x|| < 1$ Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{(I) } x \geq 0: \text{ d.h. } & |x - \frac{1}{2}|x|| = |x - \frac{1}{2}x| = |\frac{1}{2}x| \\ & \text{da } x \geq 0 \text{ ist } |\frac{1}{2}x| = \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } x < 0: \text{ d.h. } & |x - \frac{1}{2}|x|| = |x + \frac{1}{2}x| = |\frac{3}{2}x| \\ & \text{da } x < 0 \text{ ist } |\frac{3}{2}x| = -\frac{3}{2}x < 1 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_2 = \{x \mid -\frac{2}{3} < x < 0\}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}}$$

(c) $\frac{x+2}{x} < \frac{x+5}{x+1}$; $x \neq 0$, $x \neq -1$ Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{(I) } x > 0: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+2}{x} < \frac{x+5}{x+1}\right) \Leftrightarrow (x+2)(x+1) < x(x+5) \\ & \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 < x^2 + 5x \\ & \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_1 = \{x \mid x > 1\}}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } -1 < x < 0: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+2}{x} < \frac{x+5}{x+1}\right) \Leftrightarrow (x+2)(x+1) > x(x+5) \\ & \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 > x^2 + 5x \\ & \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) } x < -1: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+2}{x} < \frac{x+5}{x+1}\right) \Leftrightarrow (x+2)(x+1) < x(x+5) \\ & \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 < x^2 + 5x \\ & \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_3 = \emptyset}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid (-1 < x < 0) \vee (x > 1)\}}$$

(d) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$; $x \neq 1$, $x \neq 3$ Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{(I) } x > 3: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}\right) \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < (x-2)(x-1) \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < x^2 - 3x + 2 \\ & \Leftrightarrow x < 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_1 = \{x \mid 3 < x < 5\}}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } 1 < x < 3: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}\right) \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > (x-2)(x-1) \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > x^2 - 3x + 2 \\ & \Leftrightarrow x > 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_2 = \emptyset}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) } x < 1: \text{ d.h. } & \left(\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}\right) \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < (x-2)(x-1) \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < x^2 - 3x + 2 \\ & \Leftrightarrow x < 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_3 = \{x \mid x < 1\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid (3 < x < 5) \vee (x < 1)\}}$$

Aufgabe 5

5.1.B Es ist eine Summationsformel für die folgende Summe zu finden und diese mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^n (3k^2 + 2k^3) = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k^3$$

Mit Hilfe der bekannten Summationsformeln $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ und $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ erhält man $\sum_{k=0}^n (3k^2 + 2k^3) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) +$

$$\frac{1}{2}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+1).$$

D.h. es ist zu zeigen

$$\sum_{k=0}^n (3k^2 + 2k^3) = \frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+1).$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\text{Es ist } \sum_{k=0}^1 (3k^2 + 2k^3) = 0 + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 5 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)(1+3+1).$$

D.h. es gibt gewisse n , für die gilt: $\sum_{k=0}^n (3k^2 + 2k^3) = \frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+1)$.

Induktionsschluss: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (3k^2 + 2k^3) &= 3(n+1)^2 + 2(n+1)^3 + \sum_{k=0}^n (3k^2 + 2k^3) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+1) + 3(n+1)^2 + 2(n+1)^3 \\ &= \frac{1}{2}(n+1)[n^3 + 7n^2 + 15n + 10] \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)(n^2+5n+5) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)((n+1)^2+3n+4) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)((n+1)^2+3(n+1)+1) \end{aligned}$$

□

5.2.B Es ist eine Summationsformel für die folgende Summe zu finden und diese mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^n (q^k + kq^k) = \sum_{k=1}^n q^k + \sum_{k=1}^n kq^k; \quad q \neq 1$$

Dabei wird die Summation $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ als bekannt vorausgesetzt.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=1}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\text{Es ist } \sum_{k=1}^n kq^k = \sum_{m=1}^n \sum_{k=m}^n q^k = \sum_{m=1}^n \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} \right) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{q^m}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right) =$$

$$\frac{1}{1-q} \sum_{m=1}^n q^m - \sum_{m=1}^n \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{q-q^{n+1}}{1-q} - n \cdot \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}-nq^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{D.h. es ist } \sum_{k=1}^n (q^k + kq^k) &= \sum_{k=1}^n q^k + \sum_{k=1}^n kq^k = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q-q^{n+1}-nq^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{(1-q)(q-q^{n+1})+q-q^{n+1}-nq^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2} = \frac{2q-q^2-q^{n+1}(2+n)+q^{n+2}(1+n)}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

D.h. es ist zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^n (q^k + kq^k) = \frac{2q - q^2 - q^{n+1}(2+n) + q^{n+2}(1+n)}{(1-q)^2}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 (q^k + kq^k) &= q + q = 2q, \\ \frac{2q - q^2 - q^2(2+1) + q^3(1+1)}{(1-q)^2} &= \frac{2q - 4q^2 + 2q^3}{1-2q+q^2} = \frac{2q(1-2q+q^2)}{1-2q+q^2} = 2q \end{aligned}$$

$$\text{D.h. es gibt gewisse } n, \text{ für die gilt: } \sum_{k=1}^n (q^k + kq^k) = \frac{2q - q^2 - q^{n+1}(2+n) + q^{n+2}(1+n)}{(1-q)^2}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (q^k + kq^k) &= \sum_{k=1}^n (q^k + kq^k) + (q^{n+1} + (n+1)q^{n+1}) = \frac{2q - q^2 - q^{n+1}(2+n) + q^{n+2}(1+n)}{(1-q)^2} + \\ &\frac{(1-q)^2(q^{n+1} + (n+1)q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{2q - q^2 - q^{n+2}(3+n) + q^{n+3}(2+n)}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

□

5.3.A Bemerkung: Es gilt das bekannte Additionstheorem für Binominalkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!((k+1)+(n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Es ist folgende Idetität mit Hilfe der vollständigen Induktion zu beweisen:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

Induktionsanfang: $n = 0$

Es ist $\sum_{k=0}^0 \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0}$.

D.h. es gibt gewisse n , für die gilt: $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

Induktionsschluss: Es ist $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k}$.

Nach Voraussetzung und mit Hilfe des Additionstheorems folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1} + \binom{m+n+1}{n} = \binom{m+n+2}{n+1}.$$

□

Aufgabe 6

6.B Sei M ein metrischer Raum und $d(\cdot, \cdot)$ eine Metrik auf M . Zu zeigen: $\delta(x, y)$ mit

$$\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

definiert wieder eine Metrik auf M .

I positiv definit:

Da $d(x, y) > 0$ ist $\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} > 0$.

Zu zeigen $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

\Rightarrow : $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

\Leftarrow : $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \Rightarrow \delta(x, y) = 0$.

II Symmetrie:

Da $d(\cdot, \cdot)$ eine Metrik auf M ist, gilt

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1+d(y, x)} = \delta(y, x).$$

III Dreiecksungleichung:

Bemerkung: Für positiv reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt stets

$$\frac{a}{a+1} \leq \frac{a+b}{a+b+1}.$$

Beweis: Für positiv reelle Zahlen a, b gilt stets $a \leq a+b \Leftrightarrow a^2 + ab + a \leq a^2 + ab + a + b \Leftrightarrow a(a+b+1) \leq (a+b)(a+1)$. Division durch $(a+b+1) \neq 0$,

bzw. $(a + 1) \neq 0$ liefert die gewünschte Ungleichung.

Zu zeigen: $\delta(x, z) < \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \delta(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1+d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1+d(x, y) + d(y, z)} \leq \\ &= \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1+d(y, z)} = \delta(x, y) + \delta(y, z). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7

7.B Die Menge der Folgen $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, deren Glieder nur die Werte 0 oder 1 annehmen, ist überabzählbar.

Beweis: Gegenannahme die Menge sei abzählbar. D.h. man kann die Menge der Folgen als Liste notieren:

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)} \dots \\ a_k^{(2)} &= \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} \alpha_4^{(2)} \dots \\ a_k^{(3)} &= \alpha_1^{(3)} \alpha_2^{(3)} \alpha_3^{(3)} \alpha_4^{(3)} \dots \\ a_k^{(4)} &= \alpha_1^{(4)} \alpha_2^{(4)} \alpha_3^{(4)} \alpha_4^{(4)} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge deren Glieder nur die Werte 0 oder 1 annehmen, wobei $y_1 \neq a_1^{(1)}$, $y_2 \neq a_2^{(2)}$, $y_3 \neq a_3^{(3)}$, \dots allgemein: $y_n \neq a_n^{(n)}$.

Diese Diagonalfolge findet sich nicht in der Liste, da sie sich in mindestens einem Glied (nämlich y_i) von jeder gelisteten Folge a_i unterscheidet.

Es lässt sich stets eine derartige Diagonalfolge konstruieren, die nicht in der Liste aufgeführt ist. Damit ist die Menge nicht abzählbar, Widerspruch zur Annahme.

□